

А. Х. Шахмейстер

МНОЖЕСТВА ФУНКЦИИ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

математика



Для тех
кто
хочет
учиться

А. Х. Шахмейстер

Множества Функции Последовательности

ПОСОБИЕ ДЛЯ ШКОЛЬНИКОВ,
АБИТУРИЕНТОВ И УЧИТЕЛЕЙ

Под редакцией Б. Г. Зива

*Издательство
Московского
университета*
Черо
на
Неве МЦНМО

С.-Петербург
Москва
2004

УДК 373.167.1:512
ББК 22.141я71.6

Рецензенты:

Доктор физ-мат наук профессор МГУ **Г. Ю. Ризниченко**
Заслуженный Учитель Российской Федерации,
Соросовский Учитель **Т. И. Куршиш**
Заслуженный Учитель Российской Федерации,
Соросовский Учитель **А. Р. Майзелис**
Заслуженный Соросовский Учитель **И. Я. Веребейчик**

Книга издана при участии
книготорговой корпорации «Абрис-Д»

Шахмейстер А. Х.

Ш 32 Множества. Функции. Последовательности. —
1-е изд. — СПб.: «ЧеРо-на-Неве», 2004. — 296 с. —
ISBN 5-79130-064-6

Данное пособие предназначено для углубленного изучения школьного курса математики, содержит большое количество разноуровневого тренировочного материала. Пособие адресовано широкому кругу учащихся, абитуриентов, студентов педагогических ВУЗов, учителей.

© Шахмейстер А. Х., 2004
© Куликов Ю. Н., обложка, 2004
© «ЧеРо-на-Неве», 2004
© «Петроглиф», 2004

ISBN 5-79130-064-6

Предисловие редактора

Перед вами серия книг практически по всем разделам школьного курса математики. По существу это энциклопедия различных методов решения задач, которые чаще всего встречаются непосредственно в школьном курсе.

Это прекрасный самоучитель, который позволит ученикам и абитуриентам без репетитора подготовиться к выпускным экзаменам в школе и вступительным экзаменам в ВУЗ.

Книги серии содержат задачи разной степени сложности, которые могут быть использованы учителем для дифференцированной работы с учениками различного уровня подготовки.

Автор не претендует на то, что каждое из представленных решений является наиболее рациональным, — он дает универсальные алгоритмы для решения целых классов задач, что, на мой взгляд, гораздо важнее.

Предложенные задачи могут быть использованы учителями и учениками в процессе усвоения той или иной темы или для параллельного повторения.

Желательно, чтобы работа с материалами этой серии книг начиналась уже с 7, 8 класса и была постоянной и планомерной, тогда она даст наибольший эффект.

Б. Г. Зив

Предисловие автора

Предлагаемая серия книг адресована широкому кругу учащихся средних школ, классов и школ с углубленным изучением математики, абитуриентов, студентов педагогических ВУЗов, учителей.

Книги можно использовать как самостоятельные учебные пособия (самоучители), как задачки по данной теме и как сборники дидактических материалов.

Для учащихся можно предложить следующую схему работы: прочитав вступление и рассмотрев примеры решения, самостоятельно решать тренировочные работы, затем посмотреть решения и, осмыслив их, попробовать решить проверочные работы, проверяя их решения по книге и т. д.

Книги полностью подходят для самостоятельного овладения той или иной темой и рассчитаны на последовательное обучение от начального уровня до уровня, необходимого абитуриентам.

Для учителей эти книги предоставляют широкий выбор приемов и методов работы.

Это могут быть задания учащимся для самостоятельной работы с последующим контролем учителя.

Возможно использование книги как задачника для работы в классе и для домашних заданий.

Эти пособия идеально подходят в качестве материала для повторения параллельно изучению других тем в школе.

Подбор материала позволяет существенно дифференцировать уровень требований к учащимся при проведении контрольных и зачетных работ.

Уровень сложности и объем материала в книгах серии, безусловно, избыточен, и учитель должен сам выбирать сложность и объем материала в соответствии с возможностями учащихся и задачами, стоящими перед ними.

А. Х. Шахмейстер

1

Множества

Введение

Идя по лесу, мы автоматически отмечаем березы, сосны, дикую рябину и т. д. Входя в автобус, не задумываясь, отмечаем пожилых женщин, мужчин, подростков, маленьких детей... Каждый раз мы порой неосознанно группируем наблюдаемые объекты по признакам, свойствам, характеристикам. Находясь в классе, на работе, отдыхе, мы невольно отмечаем для себя: здесь много девочек, светловолосых парней, высоких или низких, голубоглазых или кареглазых и т. д. Процесс группировки по особенным свойствам также важен в математике, являющейся специфическим языком моделирования окружающего нас мира.

Договор. *Под множеством мы будем понимать такой набор, группу, коллекцию элементов, обладающих каким-либо общим для них всех свойством или признаком.*¹

Заглавные буквы A, B, C обозначают множества, маленькие буквы a, b, c – элементы множеств. Если элемент a принадлежит множеству A , то этот факт записывают $a \in A$. Пусть только $1 \in A$, $2 \in A$ и $3 \in A$, тогда обозначают $A = \{1; 2; 3\}$.

¹ Основателем теории множеств является немецкий ученый Георг Кантор (1845–1918).

«Множество, есть многое, мыслимое нами как единое» Г. Кантор.

Если $\forall n \in N$ такое, что $n \in A$, то записывают,¹

$$A = \{n | n \in N\}^2 \text{ или } A = \{1; 2; 3; \dots n; \dots\}.$$

Определение 1. Два множества называются равными, если они состоят из одних и тех же элементов.

Пример 1.

$$A = \{1; 2; 3; 4\};$$

$$B = \{(1; 2); (1; 3); (1; 4); (2; 3); (2; 4); (3; 4)\}.$$

Вопрос: $A = B$?

Оказывается нет, хотя в образовании их участвуют одни и те же цифры. В множестве A цифры есть элементы.

A в множестве B пары цифр есть элементы.

Определение 2. Пусть $a \in A$. Тогда если любой элемент a , принадлежащий A , принадлежит множеству B , то говорят, что множество A включено в множество B , или что множество A является подмножеством множества B , или что множество A является частью множества B .

Записывается это так.

Если для $\forall a \in A$ следует, что $a \in B$, то $A \subset B$ ³.

$$\left. \begin{array}{l} B = \{1; 2; 3; 4 \dots n \dots\} \\ A = \{2; 4; 6; \dots 2n \dots\} \end{array} \right\} \Rightarrow A \subset B^4.$$

Можно теперь дать и иное определение равенства двух множеств.

Определение 3. Два множества называются равными, если они являются взаимными подмножествами, т.е. если

$$\begin{cases} A \subset B \\ B \subset A \end{cases}.$$

Примечание. Можно принять в качестве определения любое, тогда другое будет просто **теоремой**. По современным научным представлениям множество относится к основным **неопределяемым понятиям** (поэтому мы договариваемся).

¹ \forall знак любое, всех и т.д.

² $|$ – вертикальная черта – обозначает **таких, что**

³ \subset знак включения (подмножества)

⁴ \Rightarrow знак следования (логического)

Свойства включений

1. Любое множество является своим собственным подмножеством $A \subset A$ (*рефлексивность*).
2. Из того, что множество A является подмножеством множества B , совсем не следует, что множество B является подмножеством множества A , т.е. из $(A \subset B) \not\Rightarrow (B \subset A)$ (кроме $A = B$). Свойство называется свойством *антисимметричности*.
3. Если $A \subset B$ и одновременно $B \subset C$, то $A \subset C$ (свойство *транзитивности*), т.е. если A подмножество множества B и B подмножество множества C , то отсюда следует, что A подмножество множества C .

Пример 2.

Пусть $A = \{n \mid n - \text{кратно } 2; n \in \mathbb{N}\}$,

$B = \{n \mid n - \text{кратно } 6; n \in \mathbb{N}\}$,

$C = \{n \mid n - \text{кратно } 30; n \in \mathbb{N}\}$.

Очевидно, что $\left. \begin{array}{l} B \subset A \\ C \subset B \end{array} \right\} \Rightarrow C \subset A$.

Пример 3.

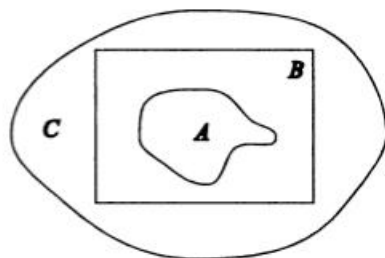
Пусть A – множество всех ромбов;

B – множество всех параллелограммов;

C – множество всех четырехугольников.

Очевидно, что $A \subset B \subset C$, т.е. $A \subset C$.

Графическая иллюстрация отражает своеобразный принцип матрешки.



Операции над множествами

Пусть $A = \{1; 3; 4; 6; 9\}$;

$B = \{2; 3; 5; 8; 9\}$.

Сопоставим двум множествам A и B третье множество C , где $C = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 8; 9\}$. Интересно, по какому закону или правилу мы это делали?

Правило на самом деле очень простое – мы выбрали все элементы, которые хоть раз присутствуют в каком-либо из множеств. Это правило назовем операцией объединения (сложения двух множеств) и дадим точное его описание.

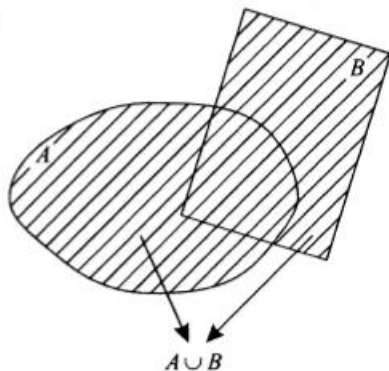
Определение 4. *Объединением множеств A и B называется множество C , образованное всеми элементами, которые принадлежат хотя бы одному из множеств A или B .*

Записывается это так:

$$A \cup B = C, \text{ где}$$

$$C = \{c | c \in A \text{ или } c \in B\}$$

(см. рис.).



Пример 4.

$$A = \{1; 3; 4; 6; 9\};$$

$$B = \{2; 3; 5; 8; 9\}.$$

Сопоставим этим двум множествам A и B множество

$C = \{3; 9\}$. Попробуем понять, по какому правилу образовано множество C .

Здесь очень простой закон. Мы выбрали из двух множеств только те элементы, которые есть и в одном множестве A , и в другом множестве B . Дадим теперь более точное описание правила.

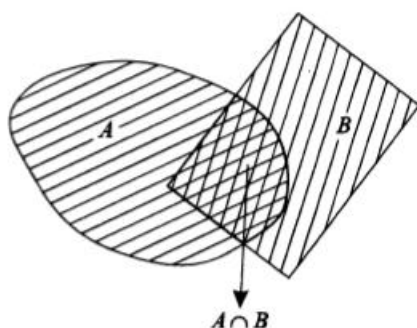
Определение 5. *Пересечением двух множеств A и B называется множество C , образованное всеми элементами, которые принадлежат одновременно и множеству A , и множеству B .*

Записывается это так:

$$A \cap B = C, \text{ где}$$

$$C = \{c \mid c \in A \text{ и } c \in B\}$$

(см. рис.).



Пример 5.

$$A = \{1; 3; 5; 11; 12; 14\},$$

$$B = \{2; 3; 10; 11; 14; 15\}.$$

$$A \cap B = \{3; 11; 14\}.$$

Пример 6.

Пусть $A = \{\text{Множество всех ромбов}\};$

$B = \{\text{Множество всех прямоугольников}\}.$

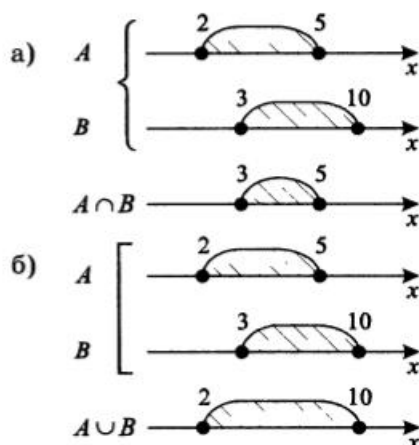
$A \cap B = \{\text{Множество всех квадратов}\}$, так как только квадрат одновременно обладает как свойствами ромба, так и свойствами прямоугольника.

Пример 7.

Пусть $A = [2; 5],$

$B = [3; 10],$

т.е. $A \cap B = [3; 5].$



Значит $A \cup B = [2; 10].$

Пример 8.¹

$$\left. \begin{aligned} A &= \{n \mid n : 3; n \in \mathbb{N}\} \\ B &= \{n \mid n : 5; n \in \mathbb{N}\} \end{aligned} \right\} \Rightarrow A \cap B = \{n \mid n : 15; n \in \mathbb{N}\}.$$

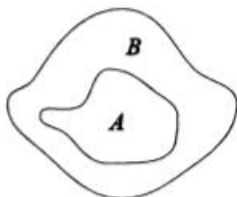
¹ $n : 3$, т.е. кратно 3 (делится нацело) и т.д.

Свойства операций

1. $A \cup A = A$.
2. $A \cap A = A$.
3. $A \cup B = B \cup A$.
4. $A \cap B = B \cap A$.

Связь включений и операций

5. $A \subset B \Rightarrow \begin{cases} A \cap B = A \\ A \cup B = B \end{cases}$.
6. $A \cap B = A \Rightarrow A \subset B$.
7. $A \cup B = B \Rightarrow A \subset B$.



Объединение и пересечение множеств обладают многими свойствами, аналогичными свойствам арифметических действий суммы (сложения) и произведения чисел (умножения).

Коммутативность действий и операций

1. $A \cup B = B \cup A$.
1. $a + b = b + a$.
2. $A \cap B = B \cap A$.
2. $a \cdot b = b \cdot a$.

Ассоциативность действий и операций

3. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$.
3. $(a + b) + c = a + (b + c)$.
4. $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$.
4. $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$.

I закон дистрибутивности для действий и операций

5. $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$.
5. $(a + b)c = ac + bc$.

II закон дистрибутивности для операций есть, для действий нет

6. $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$.
6. Аналога нет.

Отсюда ясно, что действия над числами (арифметические) есть частный случай более общих операций над множествами.

Докажем I закон дистрибутивности:

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C).$$

- 1) Пусть любой $x \in (A \cup B) \cap C$.

Это значит, что $x \in (A \cup B)$ и одновременно $x \in C$.

Так как $x \in A \cup B$, то $x \in A$ или $x \in B$.

Итак, а) $x \in A$ или $x \in B$ и

б) $x \in C$.

Значит а) $x \in A$ и одновременно $x \in C$

или б) $x \in B$ и $x \in C$.

Тогда а) $x \in A \cap C$

или б) $x \in (B \cap C)$.

Т.е. $x \in (A \cap C) \cup (B \cap C)$.

Значит $(A \cup B) \cap C \subset (A \cap C) \cup (B \cap C)$.

2) Пусть любой $x \in (A \cap C) \cup (B \cap C)$.

Это значит, что $x \in (A \cap C)$ или $x \in (B \cap C)$.

Тогда а) $x \in A$ и одновременно $x \in C$ или б) $x \in B$ и одновременно $x \in C$, но это значит $x \in A$ или $x \in B$.

Т.е. $x \in A \cup B$, но одновременно $x \in C$.

Значит $x \in (A \cup B) \cap C$.

Тогда $(A \cap C) \cup (B \cap C) \subset (A \cup B) \cap C$.

3) Так как $(A \cup B) \cap C \subset (A \cap C) \cup (B \cap C)$

и одновременно $(A \cap C) \cup (B \cap C) \subset (A \cup B) \cap C$,

то $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$.

Докажем II закон дистрибутивности:

$$(A \cup C) \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup C.$$

1) Пусть любой $x \in (A \cup C) \cap (B \cup C)$, тогда

$x \in (A \cup C)$ и $x \in (B \cup C)$.

а) Так как $x \in A \cup C$, то $x \in A$ или $x \in C$.

б) Так как $x \in B \cup C$, то $x \in B$ или $x \in C$.

Значит $x \in A$ и $x \in B$, т.е. $x \in A \cap B$ или $x \in C$.

Тогда $x \in (A \cap B) \cup C$, значит

$$((A \cup C) \cap (B \cup C)) \subset (A \cap B) \cup C.$$

2) Пусть любой $x \in (A \cap B) \cup C$, тогда $x \in (A \cap B)$ или $x \in C$, тогда или $x \in A$, и $x \in B$, или $x \in C$.

Тогда

а) $x \in A$ или $x \in C$, т.е. $x \in A \cup C$, и

б) $x \in B$ или $x \in C$, т.е. $x \in B \cup C$.

Значит $x \in (A \cup C) \cap (B \cup C)$.

Значит $(A \cap B) \cup C \subset (A \cup C) \cap (B \cup C)$.

Вывод. Так как $(A \cap B) \cup C \subset (A \cup C) \cap (B \cup C)$ и одновременно $(A \cup C) \cap (B \cup C) \subset (A \cap B) \cup C$, то отсюда следует, что $\boxed{(A \cup C) \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup C}$.

Примечание. I и II законы дистрибутивности обладают свойством двойственности, т.е. если в одном из них поменяются символы объединения на пересечение, и наоборот, все символы пересечения на символы объединения, то получится другой закон.

Практикум 1

Дано:

$$A = \{1; 2; 3; 5; 7; 10\};$$

$$B = \{3; 4; 6; 9; 10\};$$

$$C = \{2; 5; 7; 9; 11\}.$$

Найти:

1. $A \cap B =$

2. $A \cup B =$

3. $A \cup (B \cap C) =$

4. $(A \cup B) \cap C =$

5. $A \cap (B \cup C) =$

6. $(A \cap B) \cup C =$

7. $(A \cup B) \cap (B \cup C) =$

8. $(A \cap B) \cup (B \cap C) =$

9. $(A \cap C) \cup (B \cap C) =$

10. $(A \cup C) \cap (B \cup C) =$

Решение.

$$1. A \cap B = \{3; 10\}.$$

$$2. A \cup B = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 9; 10\}.$$

$$3. A \cup (B \cap C) = A \cup 9 = \{1; 2; 3; 5; 7; 9; 10\}.$$

$$4. (A \cup B) \cap C = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 9; 10\} \cap \{2; 5; 7; 9; 11\} = \\ = \{2; 5; 7; 9\}.$$

$$5. A \cap (B \cup C) = \\ = \{1; 2; 3; 5; 7; 10\} \cap \{2; 3; 4; 5; 6; 7; 9; 10; 11\} = \\ = \{2; 3; 5; 7; 10\}.$$

$$6. (A \cap B) \cup C = \{3; 10\} \cup \{2; 5; 7; 9; 11\} = \\ = \{2; 3; 5; 7; 9; 10; 11\}.$$

$$7. (A \cup B) \cap (B \cup C) = \\ = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 9; 10\} \cap \{2; 3; 4; 5; 6; 7; 9; 10; 11\} = \\ = \{2; 3; 4; 5; 6; 7; 9; 10\}.$$

$$8. (A \cap B) \cup (B \cap C) = \{3; 10\} \cup \{9\} = \{3; 9; 10\}.$$

$$9. (A \cap C) \cup (B \cap C) = \{2; 5; 7\} \cup \{9\} = \{2; 5; 7; 9\}.$$

$$10. (A \cup C) \cap (B \cup C) = \\ = \{1; 2; 3; 5; 7; 9; 10; 11\} \cap \{2; 3; 4; 5; 6; 7; 9; 10; 11\} = \\ = \{2; 3; 5; 7; 9; 10; 11\}.$$

Любопытно отметить, что результаты $4 \equiv 9$ (совпадают согласно I закону дистрибутивности) и $6 \equiv 10$ (совпадают согласно II закону дистрибутивности).

Тренировочная работа 1

Дано:

$$A = \{1; 3; 4; 6; 8; 10\};$$

$$B = \{3; 7; 8; 10\};$$

$$C = \{4; 8; 11\}.$$

Найти:

1. $A \cap B =$

2. $A \cup B =$

3. $A \cup (B \cap C) =$

4. $(A \cup B) \cap C =$

5. $A \cap (B \cup C) =$

6. $(A \cap B) \cup C =$

7. $(A \cup B) \cap (B \cup C) =$

8. $(A \cap B) \cup (B \cap C) =$

9. $(A \cap C) \cup (B \cap C) =$

10. $(A \cup C) \cap (B \cup C) =$

Решение тренировочной работы 1

1. $A \cap B = \{3; 8; 10\}$.
2. $A \cup B = \{1; 3; 4; 6; 7; 8; 10\}$.
3. $A \cup (B \cap C) = A \cup \{8\} = \{1; 3; 4; 6; 8; 10\}$.
4. $(A \cup B) \cap C = \{1; 3; 4; 6; 7; 8; 10\} \cap \{4; 8; 11\} = \{4; 8\}$.
5. $A \cap (B \cup C) = A \cap \{3; 4; 7; 8; 10; 11\} = \{3; 4; 8; 10\}$.
6. $(A \cap B) \cup C = \{3; 8; 10\} \cup C = \{3; 4; 8; 10; 11\}$.
7. $(A \cup B) \cap (B \cup C) = \{1; 3; 4; 6; 7; 8; 10\} \cap \{3; 4; 7; 8; 10; 11\} = \{3; 4; 7; 8; 10\}$.
8. $(A \cap B) \cup (B \cap C) = \{3; 8; 10\} \cup \{8\} = \{3; 8; 10\}$.
9. $(A \cap C) \cup (B \cap C) = \{4; 8\} \cup \{8\} = \{4; 8\}$.
10. $(A \cup C) \cap (B \cup C) = \{1; 3; 4; 6; 8; 10; 11\} \cap \{3; 4; 7; 8; 10; 11\} = \{3; 4; 8; 10; 11\}$.

Проверочная работа 1

Дано:

$$A = \{1; 3; 4; 6; 10\};$$

$$B = \{2; 4; 5; 6; 9; 11\};$$

$$C = \{2; 4; 6; 7; 9; 10\}.$$

Найти:

1. $A \cap B =$

2. $A \cup B =$

3. $A \cup (B \cap C) =$

4. $(A \cup B) \cap C =$

5. $A \cap (B \cup C) =$

6. $(A \cap B) \cup C =$

7. $(A \cup B) \cap (B \cup C) =$

8. $(A \cap B) \cup (B \cap C) =$

9. $(A \cap C) \cup (B \cap C) =$

10. $(A \cup C) \cap (B \cup C) =$

Зачетная работа 1

Дано:

$$A = \{1; 2; 3; 5; 7; 10\};$$

$$B = \{3; 4; 6; 9; 10\};$$

$$C = \{2; 5; 7; 9; 11\}.$$

Найти:

1. $A \cap B =$

2. $A \cup B =$

3. $A \cup (B \cap C) =$

4. $(A \cup B) \cap C =$

5. $A \cap (B \cup C) =$

6. $(A \cap B) \cup C =$

7. $(A \cup B) \cap (B \cup C) =$

8. $(A \cap B) \cup (B \cap C) =$

9. $(A \cap C) \cup (B \cap C) =$

10. $(A \cup C) \cap (B \cup C) =$

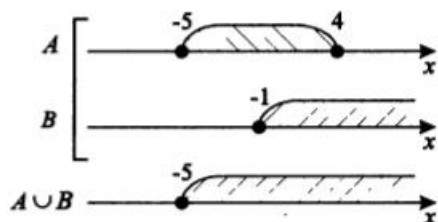
Практикум 2

Упражнения на операции над множествами.

$$A = [-5; 4]; \quad B = [-1; \infty); \quad C = (-\infty; 2].$$

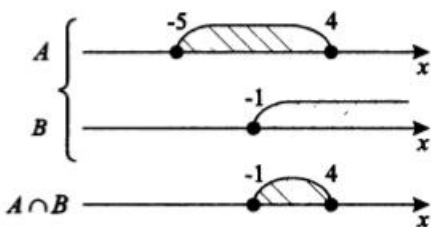
 $(\cup \text{аналог } [\]); \quad (\cap \text{аналог } \{ \}).$

1. $A \cup B$



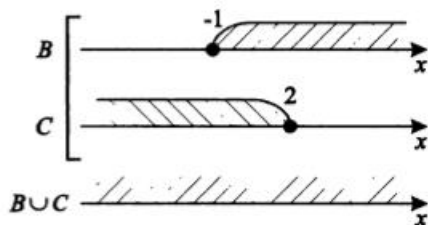
Ответ: $[-5; \infty)$.

2. $A \cap B$



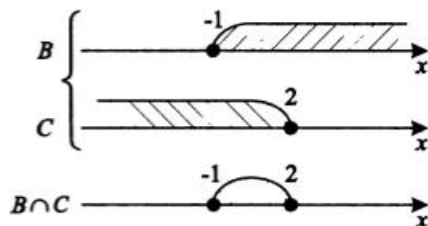
Ответ: $[-1; 4]$.

3. $B \cup C$



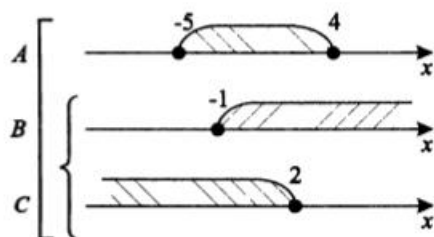
Ответ: $(-\infty; \infty)$.

4. $B \cap C$

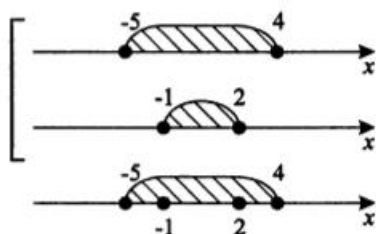


Ответ: $[-1; 2]$.

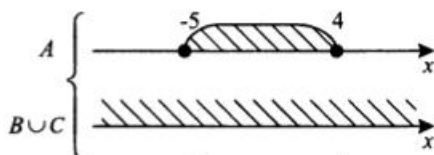
5. $A \cup (B \cap C)$



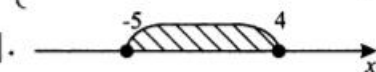
Ответ: $A \cup (B \cap C) = [-5; 4]$.



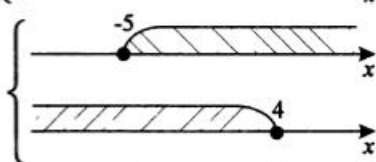
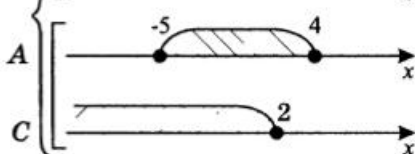
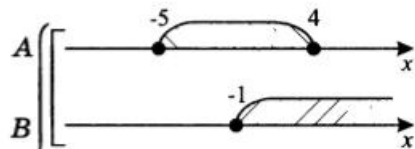
6. $A \cap (B \cup C)$



Ответ: $A \cap (B \cup C) = [-5; 4]$.

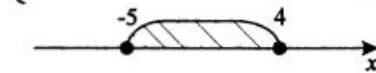


7. $(A \cup B) \cap (A \cup C)$

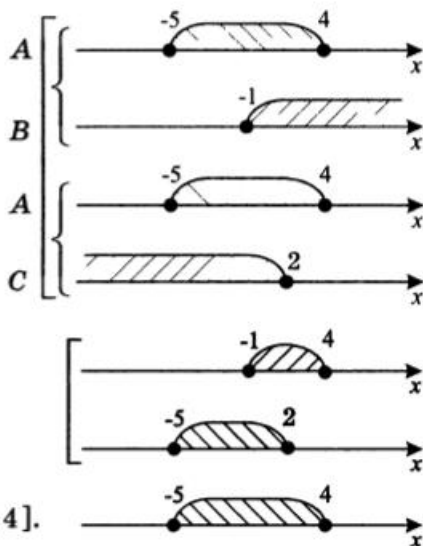


Ответ:

$(A \cup B) \cap (A \cup C) = [-5; 4]$.



$$8. (A \cap B) \cup (A \cap C)$$



Ответ:

$$(A \cap B) \cup (A \cap C) = [-5; 4].$$

Примечание. Результаты решения примеров 5, 6, 7 и 8 совпали. Что это, случайность или закономерность? Увы, это случайность, связанная с особенностями подбора базовых множеств.

Тренировочная работа 2

Самостоятельно выполните упражнения и проверьте полученные решения.

Дано:

$$A = [-3; 4];$$

$$B = [-2; \infty);$$

$$C = (-\infty; 3].$$

1. $B \cup (A \cap C) =$

2. $B \cap (A \cup C) =$

3. $C \cup (A \cap B) =$

4. $C \cap (A \cup B) =$

5. $C \cap (A \cap B) =$

6. $(A \cup C) \cap (B \cup C) =$

7. $(A \cap B) \cup (A \cap C) =$

8. $(A \cup B) \cap (B \cup C) =$

9. $(A \cap C) \cup (B \cap C) =$

10. $(A \cap B) \cup (B \cap C) =$

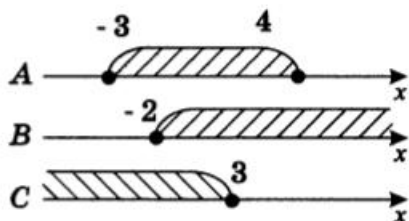
Решение тренировочной работы 2

Дано:

$$A = [-3; 4];$$

$$B = [-2; \infty);$$

$$C = (-\infty; 3].$$



1. $B \cup (A \cap C) = [-2; \infty) \cup [-3; 3] = [-3; \infty)$.
2. $B \cap (A \cup C) = [-2; \infty) \cap (-\infty; 4] = [-2; 4]$.
3. $C \cup (A \cap B) = (-\infty; 3] \cup [-2; 4] = (-\infty; 4]$.
4. $C \cap (A \cup B) = (-\infty; 3] \cap [-3; \infty) = [-3; 3]$.
5. $C \cap (A \cap B) = (-\infty; 3] \cap [-2; 4] = [-2; 3]$.
6. $(A \cup C) \cap (B \cup C) = (-\infty; 4] \cap (-\infty; \infty) = (-\infty; 4]$.
7. $(A \cap B) \cup (A \cap C) = [-2; 4] \cup [-3; 3] = [-3; 4]$.
8. $(A \cup B) \cap (B \cup C) = [-3; \infty) \cap (-\infty; \infty) = [-3; \infty)$.
9. $(A \cap C) \cup (B \cap C) = [-3; 3] \cup [-2; 3] = [-3; 3]$.
10. $(A \cap B) \cup (B \cap C) = [-2; 4] \cup [-2; 3] = [-2; 4]$.

Примечания.

Результаты примеров 2 и 10 совпадают.

В данном случае выполняется первый закон дистрибутивности, т.е. $B \cap (A \cup C) = (A \cap B) \cup (B \cap C)$, аналогично совпадают и результаты примеров 4 и 9.

Результаты примеров 3 и 6 совпадают. В данном случае выполняется второй закон дистрибутивности, т.е. $C \cup (A \cap B) = (A \cup C) \cap (B \cup C)$.

**Применение операций над множествами
к решению неравенств**

$$1. a \cdot b \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a \geq 0 \\ b \geq 0 \\ a \leq 0 \\ b \leq 0 \end{cases}.$$

$$5. \frac{a}{b} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a \geq 0 \\ b > 0 \\ a \leq 0 \\ b < 0 \end{cases}.$$

$$2. a \cdot b > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ b > 0 \\ a < 0 \\ b < 0 \end{cases}.$$

$$6. \frac{a}{b} > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ b > 0 \\ a < 0 \\ b < 0 \end{cases}.$$

$$3. a \cdot b \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a \geq 0 \\ b \leq 0 \\ a \leq 0 \\ b \geq 0 \end{cases}.$$

$$7. \frac{a}{b} \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a \geq 0 \\ b < 0 \\ a \leq 0 \\ b > 0 \end{cases}.$$

$$4. a \cdot b < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ b < 0 \\ a < 0 \\ b > 0 \end{cases}.$$

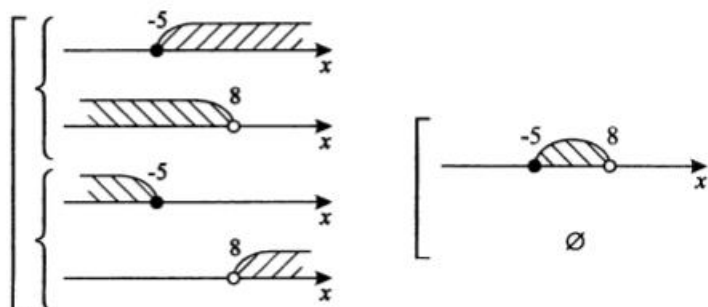
$$8. \frac{a}{b} < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ b < 0 \\ a < 0 \\ b > 0 \end{cases}.$$

Практикум 3

Решите неравенства:

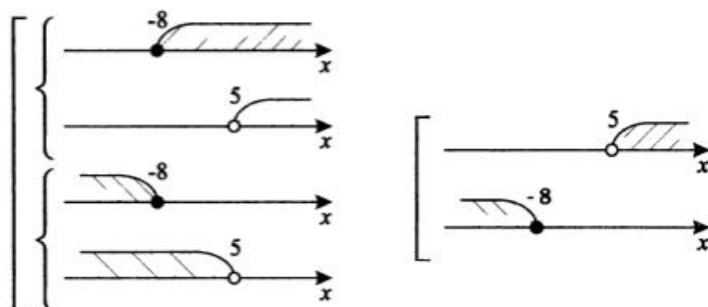
$$1. \frac{x+5}{x-8} \leq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} x+5 \geq 0 \\ x-8 < 0; \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} x+5 \leq 0 \\ x-8 > 0 \end{array} \right. \end{array} \right. ; \left[\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} x \geq -5 \\ x < 8 \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} x \leq -5 \\ x > 8 \end{array} \right. \end{array} \right.$$

В дальнейшем, если равносильность не нарушается, то (по умолчанию) знаки равносильности не ставятся.



Ответ: $[5; 8)$.

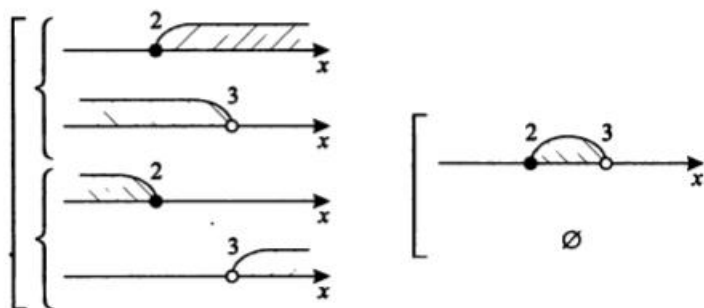
$$2. \frac{x+8}{x-5} \geq 0; \left[\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} x+8 \geq 0 \\ x-5 > 0; \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} x+8 \leq 0 \\ x-5 < 0 \end{array} \right. \end{array} \right. ; \left[\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} x \geq -8 \\ x > 5 \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} x \leq -8 \\ x < 5 \end{array} \right. \end{array} \right.$$



Ответ: $(-\infty; -8] \cup (5; \infty)$.

Если знать метод интервалов, то решения будут проще, но данный метод обрабатывает логику рассуждений.

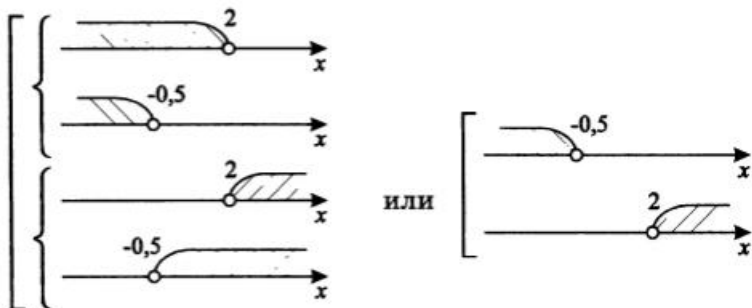
$$3. \frac{x-2}{3-x} \geq 0; \quad \begin{cases} x-2 \geq 0 \\ 3-x > 0; \\ x-2 \leq 0 \\ 3-x < 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} x \geq 2 \\ 3 > x; \\ x \leq 2 \\ 3 < x \end{cases}; \quad \begin{cases} x \geq 2 \\ x < 3 \\ x \leq 2 \\ x > 3 \end{cases}.$$



Ответ: $[2; 3)$.

$$4. (-x + 2)(2x + 1) < 0.$$

$$\begin{cases} -x + 2 > 0 \\ 2x + 1 < 0; \\ -x + 2 < 0 \\ 2x + 1 > 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} 2 > x \\ 2x < -1; \\ 2 < x \\ 2x > -1 \end{cases}; \quad \begin{cases} x < 2 \\ x < -\frac{1}{2} \\ x > 2 \\ x > -\frac{1}{2} \end{cases}.$$



Ответ: $(-\infty; -\frac{1}{2}) \cup (2; \infty)$.

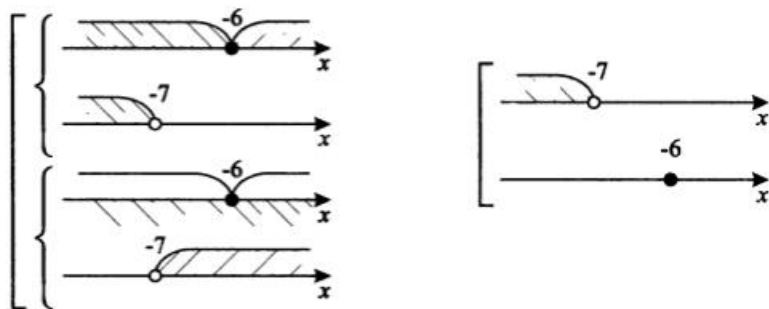
Практикум 4

Некоторые неравенства, результаты решения которых полезно иметь в виду:

1. $a^2 > 0$ $(-\infty; 0) \cup (0; \infty)$;
2. $a^2 \geq 0$ $(-\infty; \infty)$;
3. $a^2 \leq 0$ $\{0\}$;
4. $a^2 < 0$ \emptyset ;
5. $a^2 + b^2 \geq 0$ при любых a и b ;
6. $a^2 + b^2 > 0$ $\begin{cases} a \neq 0 \\ b \neq 0 \end{cases}$;
7. $a^2 + b^2 \leq 0$ $\begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \end{cases}$;
8. $a^2 + b^2 < 0$ \emptyset .

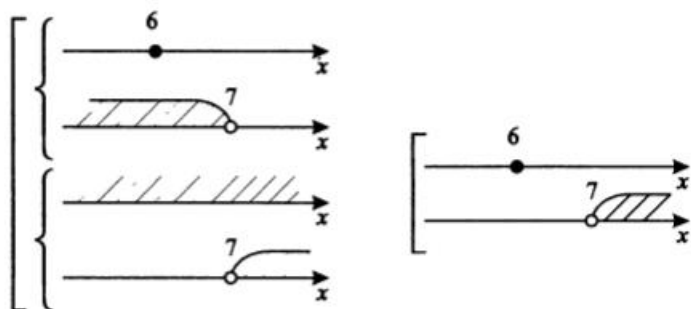
Примечание. $a^2 + b^2 = 0$ только при $\begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \end{cases}$.

$$1. \frac{(x+6)^2}{x+7} \leq 0; \quad \begin{cases} (x+6)^2 \geq 0 \\ x+7 < 0 \\ (x+6)^2 \leq 0 \\ x+7 > 0 \end{cases}.$$



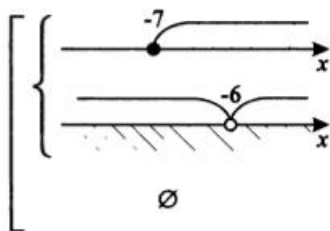
Ответ: $(-\infty; -7) \cup \{6\}$.

$$2. \frac{(x-6)^2}{x-7} \geq 0; \quad \begin{cases} (x-6)^2 \leq 0 \\ x-7 < 0 \\ (x-6)^2 \geq 0 \\ x-7 > 0 \end{cases}$$



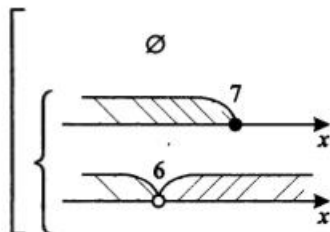
Ответ: $(7; \infty) \cup \{6\}$.

$$3. \frac{x+7}{(x+6)^2} \geq 0; \quad \begin{cases} x+7 \geq 0 \\ (x+6)^2 > 0 \\ x+7 \leq 0 \\ (x+6)^2 < 0 \end{cases}$$



Ответ: $[-7; -6) \cup (-6; \infty)$.

$$4. \frac{x-7}{(x-6)^2} \leq 0; \quad \begin{cases} x-7 \geq 0 \\ (x-6)^2 < 0 \\ x-7 \leq 0 \\ (x-6)^2 > 0 \end{cases}$$



Ответ: $(-\infty; 6) \cup (6; 7]$.

$$5. (x^2 - 4)^2 + [x(x - 2)]^2 \leq 0; \quad \begin{cases} x^2 - 4 = 0 \\ x(x - 2) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 2 \\ x = -2 \\ x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

Ответ: $\{2\}$.

6. $[x(x + 2)(x - 1)]^2 + [x(x - 1)]^2 > 0$.

Выясним, при каких x

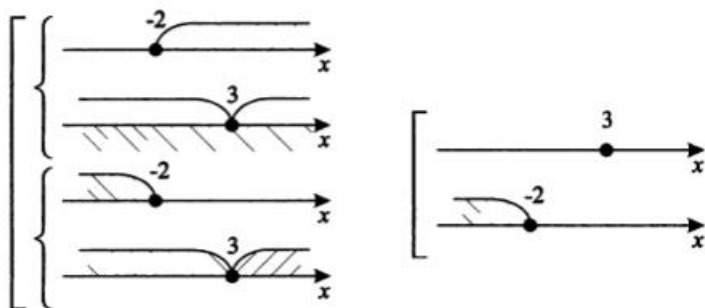
$$[x(x + 2)(x - 1)]^2 + [x(x - 1)]^2 = 0.$$

$$\begin{cases} x(x + 2)(x - 1) = 0 \\ x(x - 1) = 0 \end{cases} \text{ при } \{0; 1\}$$

Исключим эти значения.

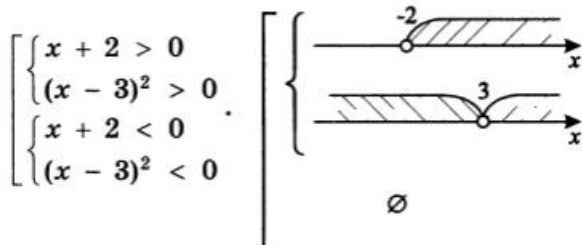
Ответ: при $x \in (-\infty; 0) \cup (0; 1) \cup (1; \infty)$.

7. $(x - 3)^2(x + 2) \leq 0$; $\begin{cases} x + 2 \geq 0 \\ (x - 3)^2 \leq 0 \\ x + 2 \leq 0 \\ (x - 3)^2 \geq 0 \end{cases}$.



Ответ: $(-\infty; -2] \cup \{3\}$.

8. $(x - 3)^2(x + 2) > 0$;



Ответ: $(-2; 3) \cup (3; \infty)$.

Тренировочная работа 3

1. $(x - 7)(x + 6) \geq 0.$

2. $\frac{x + 6}{x - 7} \leq 0.$

3. $\frac{(x - 3)^2}{x - 7} < 0.$

4. $\frac{x^2}{(x - 7)(x + 6)} \geq 0.$

5. $\frac{(x - 4)^2}{(x + 7)(x - 6)} \leq 0.$

6. $\frac{(x + 4)^2}{(x + 3)(x - 2)} \leq 0.$

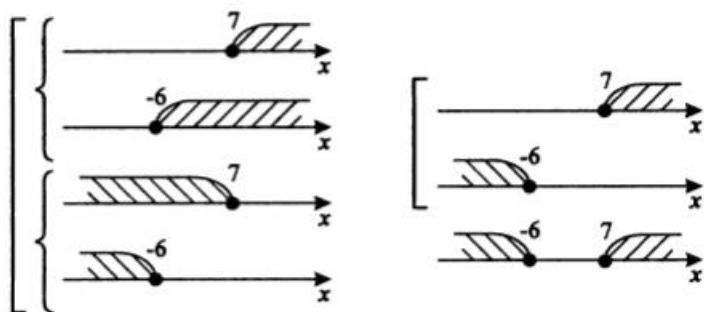
7. $(x^2 - 4)^2 + (x^2 - 4x + 4)^2 \leq 0.$

8. $(x^3 - 4x)^2 + (x^3 - 2x^2)^2 > 0.$

Решение тренировочной работы 3

1. $(x - 7)(x + 6) \geq 0$;

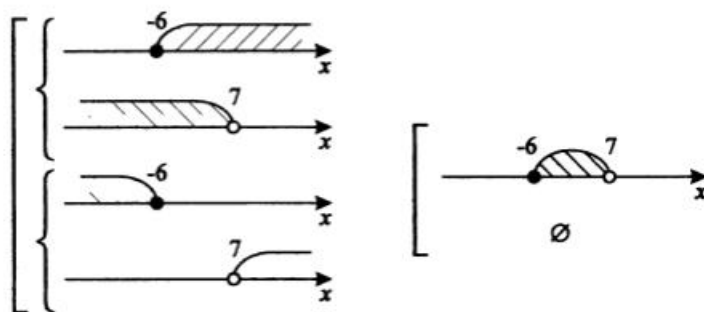
$$\left\{ \begin{array}{l} x - 7 \geq 0 \\ x + 6 \geq 0; \\ x - 7 \leq 0 \\ x + 6 \leq 0 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} x \geq 7 \\ x \geq -6 \\ x \leq 7 \\ x \leq -6 \end{array} \right.$$



Ответ: $(-\infty; -6] \cup [7; \infty)$.

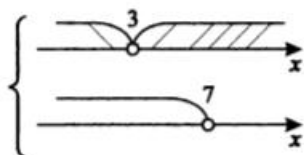
2. $\frac{x + 6}{x - 7} \leq 0$;

$$\left\{ \begin{array}{l} x + 6 \geq 0 \\ x - 7 < 0 \\ x + 6 \leq 0 \\ x - 7 > 0 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} x \geq -6 \\ x - 7 < 0 \\ x \leq -6 \\ x > 7 \end{array} \right.$$



Ответ: $[-6; 7)$.

$$3. \frac{(x-3)^2}{x-7} < 0; \quad \left\{ \begin{array}{l} (x-3)^2 > 0 \\ x-7 < 0 \\ (x-3)^2 < 0 \\ x-7 > 0 \end{array} \right. ; \quad \left\{ \begin{array}{l} x \neq 3 \\ x < 7 \\ \emptyset \end{array} \right.$$

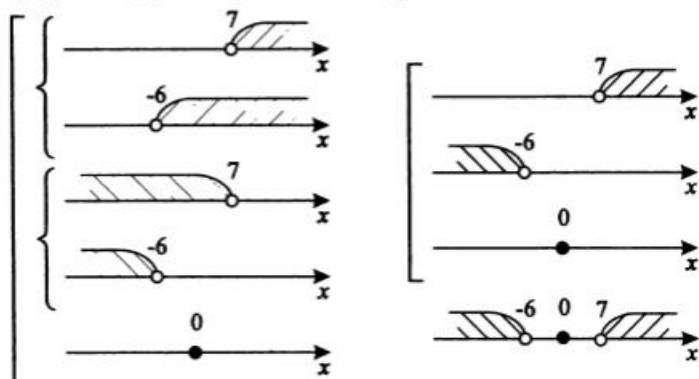


Ответ: $(-\infty; 3) \cup (3; 7)$.

$$4. \frac{x^2}{(x-7)(x+6)} \geq 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x^2 \geq 0 \\ (x-7)(x+6) > 0 \\ x^2 \leq 0 \\ (x-7)(x+6) < 0 \end{array} \right. ; \quad \left\{ \begin{array}{l} \forall x \\ (x-7)(x+6) > 0 \\ x = 0 \\ (x-7)(x+6) < 0 \end{array} \right. ;$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x-7 > 0 \\ x+6 > 0 \\ x-7 < 0 \\ x+6 < 0 \\ x = 0 \\ (0-7)(0+6) < 0 \end{array} \right. ; \quad \left\{ \begin{array}{l} x > 7 \\ x > -6 \\ x < 7 \\ x < -6 \\ x = 0 \end{array} \right.$$

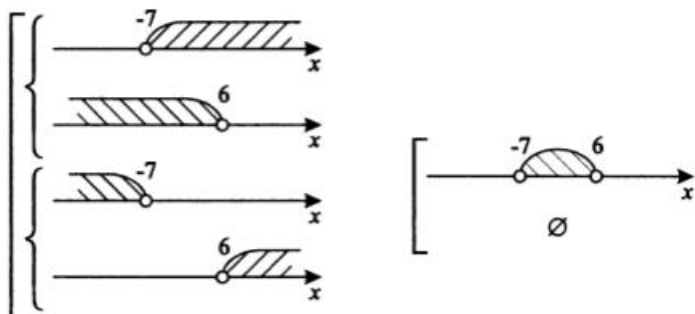


Ответ: $(-\infty; -6) \cup \{0\} \cup (7; \infty)$.

$$5. \frac{(x-4)^2}{(x+7)(x-6)} \leq 0$$

$$\left[\begin{cases} (x-4)^2 \geq 0 \\ (x+7)(x-6) < 0 \\ (x-4)^2 \leq 0 \\ (x+7)(x-6) > 0 \end{cases} ; \quad \left[\begin{cases} \forall x \\ (x+7)(x-6) < 0 \\ x = 4 \\ (x+7)(x-6) > 0 \end{cases} ;$$

$$\left[\begin{cases} x+7 > 0 \\ x-6 < 0 \\ x+7 < 0 \\ x-6 > 0 \\ x = 4 \\ 11 \cdot (-2) > 0 \end{cases} ; \quad \left[\begin{cases} x > -7 \\ x < 6 \\ x < -7 \\ x > 6 \\ \emptyset \end{cases} .$$



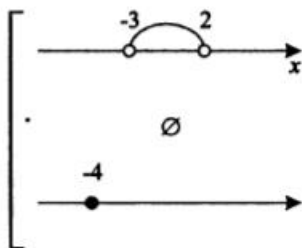
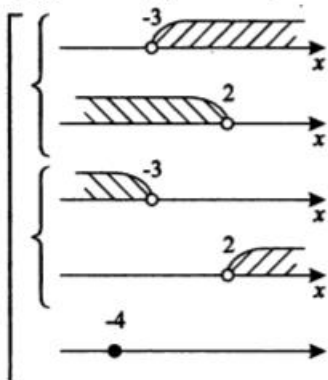
Ответ: $(-7; 6)$.

$$6. \frac{(x+4)^2}{(x+3)(x-2)} \leq 0;$$

$$\left[\begin{cases} (x+4)^2 \geq 0 \\ (x+3)(x-2) < 0 \\ (x+4)^2 \leq 0 \\ (x+3)(x-2) > 0 \end{cases} ; \quad \left[\begin{cases} \forall x \\ (x+3)(x-2) < 0 \\ x = -4 \\ (x+3)(x-2) > 0 \end{cases} ;$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x + 3 > 0 \\ x - 2 < 0 \\ x + 3 < 0 \\ x - 2 > 0 \\ x = -4 \\ (-4 + 3)(-4 - 2) > 0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x > -3 \\ x < 2 \\ x < -3 \\ x > 2 \\ x = -4 \end{array} \right.$$



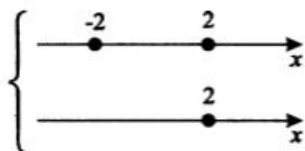
Ответ: $\{-4\} \cup (-3; 2)$.

$$7. (x^2 - 4)^2 + (x^2 - 4x + 4)^2 \leq 0;$$

$$(x^2 - 4)^2 + (x^2 - 4x + 4)^2 = 0;$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x^2 - 4 = 0 \\ x^2 - 4x + 4 = 0 \end{array} \right.;$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (x + 2)(x - 2) = 0 \\ (x - 2)^2 = 0 \end{array} \right.$$



Ответ: $x = 2$.

$$8. (x^3 - 4x)^2 + (x^3 - 2x^2)^2 > 0.$$

Для этого выясним, когда $(x^3 - 4x)^2 + (x^3 - 2x^2)^2 = 0$,
и исключим эти значения, так как

$$\left(a^2 + b^2 > 0 \quad \begin{cases} \forall a, b \\ a \neq 0 \\ b \neq 0 \end{cases} \right); \quad \begin{cases} x^3 - 4x = 0; \\ x^3 - 2x^2 = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(x-2)(x+2) = 0; \\ x^2(x-2) = 0 \end{cases}; \quad \left\{ \begin{array}{l} \begin{array}{c} \xrightarrow{x} \\ \bullet \quad \bullet \quad \bullet \\ -2 \quad 0 \quad 2 \end{array} \\ \begin{array}{c} \xrightarrow{x} \\ \bullet \quad \bullet \\ 0 \quad 2 \end{array} \end{array} \right.$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

Ответ: $(-\infty; 0) \cup (0; 2) \cup (2; \infty)$.

Зачетная работа 2

1. $(6 - x)(x + 2) < 0.$

2. $\frac{x + 2}{6 - x} \geq 0.$

3. $\frac{(x + 7)^2}{x + 3} \geq 0.$

4. $\frac{(x + 3)^2}{x^2 - 1} \leq 0.$

5. $\frac{x^2 - 5x}{x^2 - 25} \leq 0.$

6. $\frac{(x - 3)(x + 2)}{(x - 1)^2} \leq 0.$

7. $(4 - x)(x + 1)(x - 3) > 0.$

8. $\frac{(x + 2)(1 - x)}{(x^2 - 9)^2 + (x^2 + 2x - 3)^2} \leq 0.$

Мощность множества

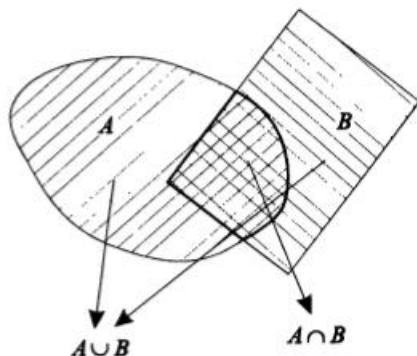
Определение 6. Для конечного множества A через $m(A)$ обозначим число элементов в множестве A .

\emptyset – таким символом обозначается множество, не содержащее ни одного элемента. Такое множество называется пустым. Очевидно, $m(\emptyset) = 0$.

Теорема. Для любых конечных множеств справедливо утверждение $m(A \cup B) = m(A) + m(B) - m(A \cap B)$.

Примечание.

Если $A \cap B \neq \emptyset$, то в число $m(A) + m(B)$ входит дважды число $m(A \cap B)$, как часть числа $m(A)$ и как часть числа $m(B)$, но в число $m(A \cup B)$ число $m(A \cap B)$ входит только один раз (см. рис.).



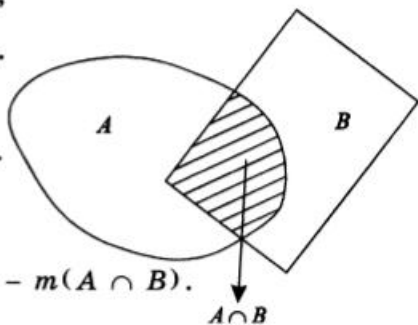
$m(A)$ называется мощностью множества A .

Для бесконечных множеств, например множества рациональных чисел, мощность множества называется *счетной*. Для иррациональных чисел мощность множества – континуум.

Практикум 5

I. Какое условие надо наложить на A и B , чтобы были справедливы следующие утверждения, если $A \neq B$?

1. $m(A) + m(B) > m(A \cup B)$;
2. $m(A \cup B) = m(A)$;
3. $m(A) + m(B) = m(A \cup B)$;
4. $m(A) + m(B) < m(A \cup B)$.



1. $m(A) + m(B) > m(A \cup B)$.

Очевидно, что при $A \cap B \neq \emptyset$, так как

$$m(A \cup B) = m(A) + m(B) - m(A \cap B).$$

Ответ: при $A \cap B \neq \emptyset$.

2. $m(A \cup B) = m(A)$:

1) если $B = \emptyset$,
тогда $A \cup B = A \cup \emptyset = A$;

2) $B \subset A$, так как при этом $A \cup B = A$,
то $m(A \cup B) = m(A)$.

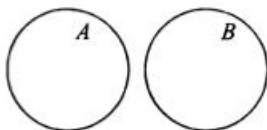
Ответ: при $B \subset A$.

Примечание. $\emptyset \in B$.

3. $m(A) + m(B) = m(A \cup B)$.

Если $A \cap B = \emptyset$, тогда $m(A \cap B) = 0$, и с учетом результатов теоремы получим, что это возможно, только если $A \cap B = \emptyset$.

Ответ: при $A \cap B = \emptyset$.



$$4. m(A) + m(B) < m(A \cup B).$$

Так как $m(A \cup B) = m(A) + m(B) - m(A \cap B)$,
то это невозможно, так как $m(A \cap B) \geq 0$ всегда.

Ответ: утверждение ложно при любых A и B .

II. 1. Экзамен по математике сдавали 250 человек.

Отметку ниже пяти получили 180 человек.

Выдержали экзамен 210 человек.

Сколько человек получили отметку три или четыре?

1) Пусть A – множество человек, выдержавших экзамен. Тогда $m(A) = 210$.

B – множество человек, получивших отметку ниже пяти,
т.е. $m(B) = 180$.

2) $A \cup B$ – множество человек, сдававших экзамен.
Тогда $m(A \cup B) = 250$. С другой стороны, по
теореме $m(A \cup B) = m(A) + m(B) - m(A \cap B)$.

3) $A \cap B$ – множество человек, сдавших экзамен
на три или четыре.

Тогда $m(A \cap B) = m(A) + m(B) - m(A \cup B)$.

Подставляя уже известные данные, имеем

$$m(A \cap B) = 210 + 180 - 250 = 140.$$

Ответ: 140 человек получили отметку три или четыре.

2. В школе 1400 учеников, из них 1200 учеников умеют кататься на лыжах. 952 ученика умеют кататься на коньках. Не умеют кататься ни на лыжах, ни на коньках 60 учеников.

Сколько учеников умеют кататься на лыжах и на коньках?

Из условия задачи следует, что только 1340 учащихся умеют кататься на коньках или лыжах.

1) Пусть A – множество учащихся, умеющих кататься на лыжах, тогда $m(A) = 1200$.

2) Пусть B – множество учащихся, умеющих кататься на коньках, тогда $m(B) = 952$.

3) $A \cup B$ – множество учащихся, умеющих кататься или на лыжах, или на коньках, тогда по теореме $m(A \cup B) = m(A) + m(B) - m(A \cap B)$, где $A \cap B$ – множество учащихся, умеющих кататься и на лыжах, и на коньках.

Тогда $m(A \cap B) = m(A) + m(B) - m(A \cup B)$,

значит $m(A \cap B) = 1200 + 952 - 1340$,

т.е. $m(A \cap B) = 812$.

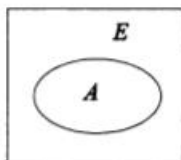
Ответ: 812 учеников школы умеют кататься и на лыжах, и на коньках.

Дополнение

Определение 7. Пусть E — есть основное или универсальное множество, где $A \subset E$, тогда

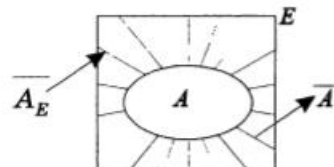
$$\begin{cases} A \cup E = E \\ A \cap E = A \end{cases}$$

$$A \subset E.$$



Определение 8. Множество всех элементов универсального множества E , не принадлежащих множеству A , называется дополнением множества A до E .

Обозначается \bar{A}_E или просто \bar{A} , если известно универсальное множество E .



Очевидно, из определения следует:

- $\begin{cases} A \cup \bar{A} = E; \\ A \cap \bar{A} = \emptyset \end{cases}$
- $\bar{\emptyset} = E;$
- $\bar{E} = \emptyset;$
- $E \cap \bar{A} = \bar{A};$
- $\bar{A} \cup E = E;$
- $\overline{(\bar{A})} = A.$

Свойства дополнений

- $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B};$
- $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}.$

Примечание. Эти свойства дополнений обладают свойствами двойственности.

Доказательство:

$$1. \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

$$1) \text{ Докажем } \overline{A \cup B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}.$$

Пусть $\forall x \in \overline{A \cup B}$, т.е. $x \notin A \cup B$,
т.е. $x \notin A$ и $x \notin B$.

Отсюда $x \in \overline{A}$ и $x \in \overline{B}$, т.е. $x \in \overline{A} \cap \overline{B}$;
 $\overline{A \cup B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$.

$$2) \text{ Докажем } \overline{A} \cap \overline{B} \subset \overline{A \cup B}.$$

Пусть $\forall x \in \overline{A} \cap \overline{B}$, т.е. $x \in \overline{A}$ и $x \in \overline{B}$,
т.е. $x \notin A$ и $x \notin B$, отсюда $x \notin A \cup B$.

Таким образом, $x \in \overline{A \cup B}$.

Итак, мы доказали, что

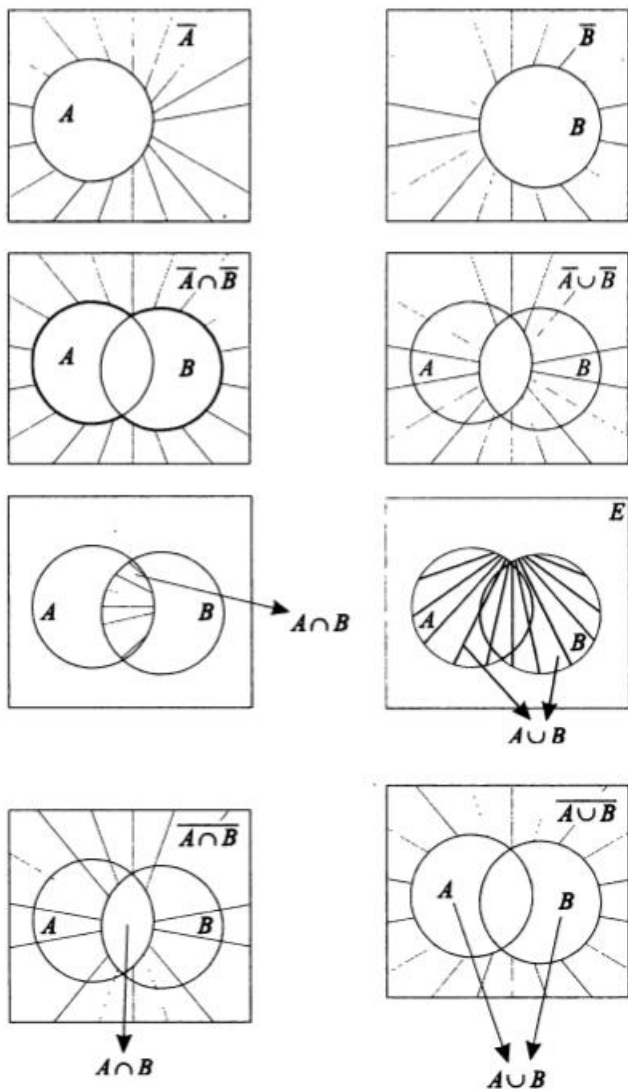
$$\begin{cases} \overline{A} \cap \overline{B} \subset \overline{A \cup B} \\ \overline{A \cup B} \subset \overline{A} \cap \overline{B} \end{cases} \Rightarrow \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}.$$

$$2. \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}.$$

Доказательство попробуйте провести самостоятельно,
аналогично предыдущему.

Практикум 6

Графические решения и иллюстрации операций над множествами, связанные с дополнением.



Обратите внимание на одинаковые картинки и подумайте, с какими свойствами это связано.

Практикум 7

Дано:

$$E = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10\};$$

$$B = \{2; 3; 5; 8; 10\};$$

$$A = \{1; 3; 4; 8\}.$$

Найти:

$$1. \overline{(A \cup B)} =$$

$$2. \overline{A}_E =$$

$$3. \overline{B}_E =$$

$$4. \overline{(A \cap B)}_E =$$

$$5. \overline{A}_E \cup \overline{B}_E =$$

$$6. A \cap \overline{B}_E =$$

$$7. \overline{A}_E \cap \overline{B}_E =$$

$$8. \overline{\overline{A}_E \cup B} =$$

Решение практикума 7

$$1. \overline{(A \cup B)} = \overline{\{1; 2; 3; 4; 5; 8; 10\}} = \{6; 7; 9\}.$$

$$2. \overline{A}_E = \{2; 5; 6; 7; 9; 10\}.$$

$$3. \overline{B}_E = \{1; 4; 6; 7; 9\}.$$

$$4. \overline{(A \cap B)}_E = \overline{\{3; 8\}}_E = \{1; 2; 4; 5; 6; 7; 9; 10\}.$$

$$5. \overline{A}_E \cup \overline{B}_E = \{1; 2; 4; 5; 6; 7; 9; 10\}.$$

$$6. A \cap \overline{B}_E = \{1; 4\}_E = \{2; 3; 5; 6; 7; 8; 9; 10\}.$$

$$7. \overline{A}_E \cap \overline{B}_E = \{6; 7; 9\}.$$

$$8. \overline{\overline{A}_E \cup B} = \overline{\overline{A} \cap \overline{B}} = A \cap \{1; 4; 6; 7; 9\} = \{1; 4\}.$$

Тренировочная работа 4

1. Найдите:

$$A = \{ 1; 2; 5; 7; 8; 10; 11 \};$$

$$B = \{ 2; 5; 6; 10; 12 \};$$

$$C = \{ 5; 7; 8; 12 \}.$$

1) $A \cap B =$

2) $A \cup B =$

3) $A \cup (B \cap C) =$

4) $(A \cup B) \cap C =$

5) $A \cap (B \cup C) =$

6) $(A \cap B) \cup C =$

7) $(A \cup B) \cap (B \cup C) =$

8) $(A \cap B) \cup (B \cap C) =$

9) $(A \cap C) \cup (B \cap C) =$

10) $(A \cup C) \cap (B \cup C) =$

2. $M = \{ 2; 4; 6; 8; 10; 12; 14 \};$

$$N = \{ 4; 8; 12 \}; \quad K = \{ 2; 6; 12; 14 \}.$$

1) $\overline{N_M} \cap \overline{K_M} =$

2) $\overline{N_M} \cup \overline{K_M} =$

3) $\overline{(N \cap K)_M} =$

4) $\overline{(N \cup K)_M} =$

3. Графически иллюстрировать:

1) $A \cup \overline{B};$ 3) $\overline{A \cup B};$ 5) $(\overline{A} \cap B) \cup (A \cap \overline{B});$

2) $\overline{A} \cap B;$ 4) $\overline{A \cup B};$ 6) $(A \cup \overline{B}) \cap (\overline{A} \cup B).$

Решение тренировочной работы 4

1. Найдите:

$$A = \{ 1; 2; 5; 7; 8; 10; 11 \};$$

$$B = \{ 2; 5; 6; 10; 12 \};$$

$$C = \{ 5; 7; 8; 12 \}.$$

1) $A \cap B = \{ 2; 5; 10 \}.$

2) $A \cup B = \{ 1; 2; 5; 6; 7; 8; 10; 11; 12 \}.$

3) $A \cup (B \cap C) = \{ 1; 2; 5; 7; 8; 10; 11; 12 \}.$

4) $(A \cup B) \cap C = \{ 5; 7; 8; 12 \}.$

5) $A \cap (B \cup C) = \{ 2; 5; 7; 8; 10 \}.$

6) $(A \cap B) \cup C = \{ 2; 5; 7; 8; 10; 12 \}.$

7) $(A \cup B) \cap (B \cup C) = \{ 2; 5; 6; 7; 8; 10; 12 \}.$

8) $(A \cap B) \cup (B \cap C) = \{ 2; 5; 10; 12 \}.$

9) $(A \cap C) \cup (B \cap C) = \{ 5; 7; 8; 12 \}.$

10) $(A \cup C) \cap (B \cup C) = \{ 2; 5; 7; 8; 10; 12 \}.$

2. $M = \{ 2; 4; 6; 8; 10; 12; 14 \};$

$$N = \{ 4; 8; 12 \};$$

$$K = \{ 2; 6; 12; 14 \}.$$

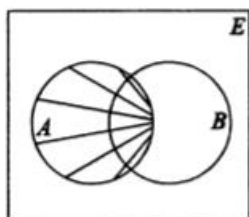
1) $\overline{N_M} \cap \overline{K_M} = \{ 2; 6; 10; 14 \} \cap \{ 4; 8; 10 \} = \{ 10 \}.$

2) $\overline{N_M} \cup \overline{K_M} = \{ 2; 6; 10; 14 \} \cup \{ 4; 8; 10 \} = \{ 2; 4; 6; 8; 10; 14 \}.$

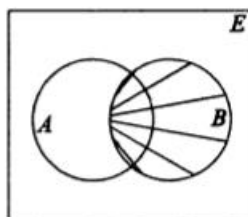
3) $\overline{(N \cap K)_M} = \overline{\{12\}_M} = \{ 2; 4; 6; 8; 10; 14 \}.$

4) $\overline{(N \cup K)_M} = \overline{\{ 2; 4; 6; 8; 12; 14 \}_M} = \{ 10 \}.$

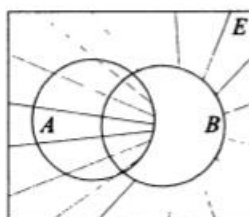
3. Графически иллюстрировать операции над множествами и дополнения до E , где



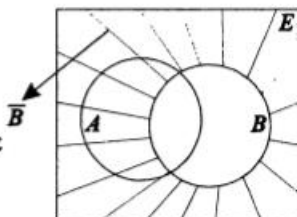
и



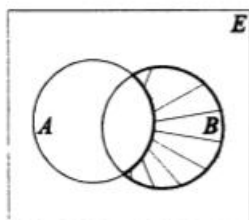
1) $A \cup \bar{B}$



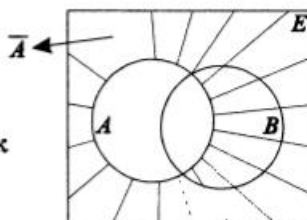
так как



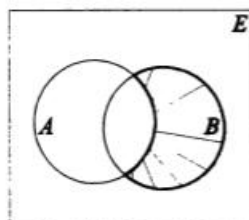
2) $\bar{A} \cap B$



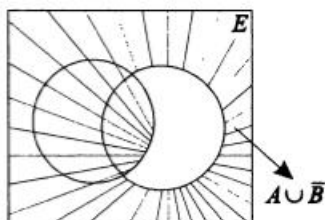
так как



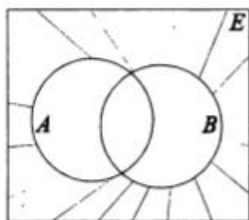
3) $\overline{A \cap B}$



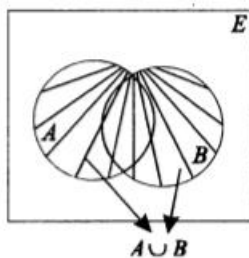
так как



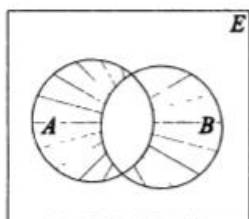
4) $\overline{A \cup B}$



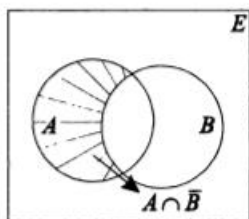
так как



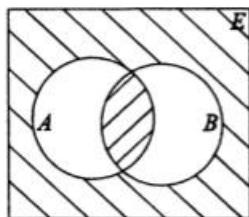
5) $(\overline{A \cap B}) \cup (A \cap \overline{B})$



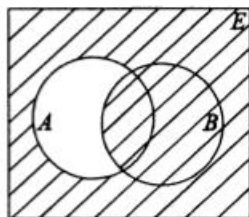
так как



6) $(A \cup \overline{B}) \cap (\overline{A} \cup B)$



так как



Практикум 8

Вернемся и попробуем теперь с позиций новых знаний решить задачу, которую мы раньше решили (см. с. 39).

1. В школе 1400 учеников из них 1200 учеников умеют кататься на лыжах. 952 ученика умеют кататься на коньках. Не умеют кататься ни на лыжах, ни на коньках 60 учеников. Сколько учеников умеют кататься на лыжах и на коньках?

Пусть

- 1) E – множество всех учеников школы; $m(E) = 1400$.
- 2) A – множество всех учеников школы, умеющих кататься на лыжах; $m(A) = 1200$.
 \bar{A} – множество всех учеников школы, не умеющих кататься на лыжах.
- 3) B – множество всех учеников школы, умеющих кататься на коньках; $m(B) = 952$. \bar{B} – множество всех учеников школы, не умеющих кататься на коньках.
- 4) $\bar{A} \cap \bar{B}$ – множество всех учеников школы, не умеющих кататься ни на лыжах, ни на коньках.

Но $m(\bar{A} \cap \bar{B}) = 60$, так как $\bar{A} \cap \bar{B} = \overline{A \cup B}$.

$$\begin{cases} (A \cup B) \cup \overline{A \cup B} = E, \\ (A \cup B) \cap \overline{A \cup B} = \emptyset, \end{cases}$$

то $m(A \cup B) = m(E) - m(\overline{A \cup B})$,

т.е. $m(A \cup B) = 1400 - 60 = 1340$.

Тогда, так как $m(A \cap B) = m(A) + m(B) - m(A \cup B)$,

то $m(A \cap B) = 1200 + 952 - 1340$,

значит $m(A \cap B) = 812$.

Ответ: 812 учеников школы умеют кататься и на лыжах, и на коньках.

2. В группе из 100 туристов 70 человек знают английский язык, 45 знают французский, 23 человека знают оба языка. Сколько туристов в группе не знают ни английского, ни французского языка?

Пусть

- 1) A – множество туристов, знающих английский язык.

Тогда $m(A) = 70$.

- 2) B – множество туристов, знающих французский язык.

Тогда $m(B) = 45$.

- 3) $A \cap B$ – множество туристов, знающих и английский, и французский язык.

Тогда $m(A \cap B) = 23$.

- 4) Так как $m(A \cup B) = m(A) + m(B) - m(A \cap B)$,
значит $m(A \cup B) = 70 + 45 - 23 = 92$.

- 5) Так как

$$\left. \begin{array}{l} (A \cup B) \cup \overline{A \cup B} = E \\ (A \cup B) \cap \overline{A \cup B} = \emptyset \end{array} \right\} \Rightarrow \overline{m(A \cup B)} = m(E) - m(A \cup B),$$

где $\overline{A \cup B}$ – множество туристов, не знающих ни английского, ни французского языка.

$$m(\overline{A \cup B}) = 100 - 92 = 8.$$

Ответ: 8 туристов в группе не знают ни английского, ни французского языка.

Рассмотрим более сложную задачу.

3. В олимпиаде по математике для абитуриентов приняло участие 40 учащихся, им было предложено решить одну задачу по алгебре, одну по геометрии и одну по тригонометрии.

- 1) По алгебре решили задачу 20 человек.

- 2) По геометрии решили задачу 18 человек.

- 3) По тригонометрии решили задачу 18 человек.

- 4) По алгебре и геометрии решили задачу 7 человек.
- 5) По алгебре и тригонометрии решили задачу 8 человек.
- 6) По геометрии и тригонометрии решили задачу 9 человек.
- 7) Ни одной задачи не решили 3 человека.

Вопросы:

- 1) Сколько учащихся решили все задачи?
- 2) Сколько учащихся решили только две задачи?
- 3) Сколько учащихся решили только одну задачу?

Итак, попытаемся, используя понятие дополнения, решить задачу.

1) Пусть

E – множество абитуриентов;

A – множество решивших алгебру;

B – множество решивших геометрию;

C – множество решивших тригонометрию.

По условию

$$m(A) = 20; \quad m(A \cap B) = 7;$$

$$m(B) = 18; \quad m(A \cap C) = 8;$$

$$m(C) = 18; \quad m(B \cap C) = 9.$$

$$\text{Так как } \begin{aligned} (A \cup B \cup C) \cup \overline{(A \cup B \cup C)} &= E, \\ (A \cup B \cup C) \cap \overline{(A \cup B \cup C)} &= \emptyset, \end{aligned}$$

$$\text{то } m(A \cup B \cup C) + m(\overline{(A \cup B \cup C)}) = m(E);$$

$m(\overline{(A \cup B \cup C)})$ – количество не решивших ни одной задачи, т.е. $m(\overline{(A \cup B \cup C)}) = 3$.

$$\text{Значит } m(A \cup B \cup C) = 40 - 3 = 37,$$

где $A \cup B \cup C$ – множество учеников, решивших хотя бы одну задачу.

2) Выясним чему равны:

а) $m(A \cup B)$;

$$m(A \cup B) = m(A) + m(B) - m(A \cap B),$$

тогда $m(A \cup B) = 20 + 18 - 7 = 31$;

б) $m(A \cup C)$;

$$m(A \cup C) = m(A) + m(C) - m(A \cap C),$$

тогда $m(A \cup C) = 20 + 18 - 8 = 30$.

в) $m(B \cup C)$;

$$m(B \cup C) = m(B) + m(C) - m(B \cap C),$$

тогда $m(B \cup C) = 18 + 18 - 9 = 27$.

3) Используя полученные результаты, продолжим решение:

а) $m(A \cap B \cap C) = m(A \cap B) + m(C) - m((A \cap B) \cup C)$;

$$m((A \cap B) \cup C) = m[(A \cup C) \cap (B \cup C)] =$$

$$= m(A \cup C) + m(B \cup C) - m[(A \cup C) \cup (B \cup C)] =$$

$$= m(A \cup C) + m(B \cup C) - m(A \cup B \cup C).$$

Тогда $m((A \cap B) \cup C) = 30 + 27 - 37 = 20$,

значит $m(A \cap B \cap C) = 7 + 18 - 20 = 5$ —
число учеников, решивших все три задачи.

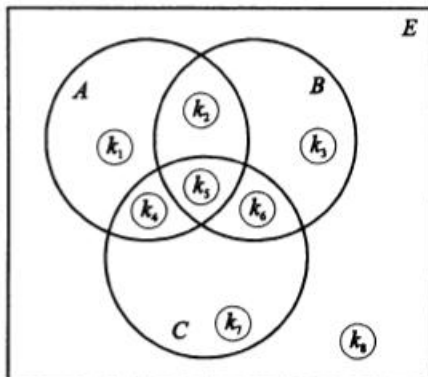
б) $m(A \cap B) + m(A \cap C) + m(B \cap C) - 3m(A \cap B \cap C)$ —
число решивших только две задачи, т. е.

$$m(A \cap B) + m(A \cap C) + m(B \cap C) - 3m(A \cap B \cap C) =$$

$$= 7 + 8 + 9 - 3 \cdot 5 = 9.$$

в) $m(A \cup B \cup C) - (5 + 9) = 37 - 5 - 9 = 23$ —
число решивших только одну задачу.

Попробуем это решение иллюстрировать графически, тогда возможно оно станет более понятно, хотя и с несколько иных позиций. Обозначим разбиение универсального множества E множествами A ; B ; C .



k_1 – множество учеников, решивших только задачу по алгебре;

k_2 – множество учеников, решивших только две задачи, по алгебре и по геометрии;

k_3 – множество учеников, решивших только задачу по геометрии;

k_4 – множество учеников, решивших только две задачи, по алгебре и тригонометрии;

k_5 – множество всех учеников, решивших все три задачи;

k_6 – множество всех учеников, решивших только две задачи, по геометрии и тригонометрии;

k_7 – множество всех учеников, решивших только задачу по тригонометрии;

k_8 – множество всех учеников, не решивших ни одной задачи.

Тогда

$$m(k_5) = m(A \cap B \cap C) = 5;$$

$$m(k_2) = m(A \cap B) - m(A \cap B \cap C) = 7 - 5 = 2;$$

$$m(k_4) = m(A \cap C) - m(A \cap B \cap C) = 8 - 5 = 3;$$

$$m(k_6) = m(B \cap C) - m(A \cap B \cap C) = 9 - 5 = 4;$$

$$m(k_1) = m(A) - m(k_2) - m(k_4) - m(k_5) = 20 - 2 - 3 - 5 = 10;$$

$$m(k_3) = m(B) - m(k_2) - m(k_6) - m(k_5) = 18 - 2 - 4 - 5 = 7;$$

$$m(k_7) = m(C) - m(k_4) - m(k_6) - m(k_5) = 18 - 3 - 4 - 5 = 6.$$

Тогда очевидно, что

$m(k_2) + m(k_4) + m(k_6) = 2 + 3 + 4 = 9$ — число учеников, решивших только две задачи;

$m(k_1) + m(k_3) + m(k_7) = 10 + 7 + 6 = 23$ — число учеников, решивших только одну задачу.

Ответ: 5 учеников решили три задачи; 9 учеников решили только по две задачи; 23 ученика решили только по одной задаче.

Тренировочная работа 5

1. В отряде из 40 ребят 30 умеют плавать; 27 умеют играть в шахматы; 5 не умеют ни плавать, ни играть в шахматы.

Вопрос. Сколько ребят умеют плавать и играть в шахматы?

2. На уроке литературы учитель решил узнать, кто из 40 учеников класса читал книги *A*, *B*, *C*. Результаты опроса оказались таковы:

книгу *A* – читали 25 учеников;

книгу *B* – читали 22 ученика;

книгу *C* – читали 22 ученика;

книги *A* или *B* читали 33 ученика;

книги *A* или *C* читали 32 ученика;

книги *B* или *C* читал 31 ученик;

все книги читали 10 учеников.

Вопросы:

- 1) Сколько учеников прочли только книгу *A*?
- 2) Сколько учеников прочли только книгу *B*?
- 3) Сколько учеников прочли только книгу *C*?
- 4) Сколько учеников прочли только по одной книге?
- 5) Сколько учеников прочли хотя бы одну книгу?
- 6) Сколько учеников не прочитали ни одной книги?

Решение тренировочной работы 5

1. В отряде из 40 ребят 30 умеют плавать; 27 умеют играть в шахматы; 5 не умеют ни плавать, ни играть в шахматы.

Вопрос. Сколько ребят умеют плавать и играть в шахматы?

E – количество ребят в отряде; $m(E) = 40$;

A – множество ребят, умеющих плавать; $m(A) = 30$;

B – множество ребят, умеющих играть в шахматы;
 $m(B) = 27$;

\bar{A} – множество ребят, не умеющих плавать.

\bar{B} – множество ребят, не умеющих играть в шахматы.

$\bar{A} \cap \bar{B}$ – множество ребят, не умеющих ни плавать, ни играть в шахматы.

$$m(\bar{A} \cap \bar{B}) = 5, \text{ так как } \bar{A} \cap \bar{B} = \overline{A \cup B}$$

$$\text{и } \begin{cases} (A \cup B) \cup \overline{A \cup B} = E \\ (A \cup B) \cap \overline{A \cup B} = \emptyset \end{cases}, \text{ то}$$

$$m(A \cup B) + m(\overline{A \cup B}) = m(E),$$

$$\text{т.е. } m(A \cup B) = 40 - 5 = 35.$$

С другой стороны, по теореме

$$m(A \cap B) = m(A) + m(B) - m(A \cup B),$$

$$\text{значит } m(A \cap B) = 30 + 27 - 35 = 22.$$

Ответ: 22 человека из отряда умеют и плавать, и играть в шахматы.

2. На уроке литературы учитель решил узнать, кто из 40 учеников класса читал книги A, B, C . Результаты опроса оказались таковы:
- книгу A читали 25 учеников;
 - книгу B читали 22 ученика;
 - книгу C читали 22 ученика;
 - книги A или B читали 33 ученика;
 - книги A или C читали 32 ученика;
 - книги B или C читал 31 ученик;
 - все книги читали 10 учеников.

Вопросы:

- 1) Сколько учеников прочли только книгу A ?
- 2) Сколько учеников прочли только книгу B ?
- 3) Сколько учеников прочли только книгу C ?
- 4) Сколько учеников прочли только по одной книге?
- 5) Сколько учеников прочли хотя бы одну книгу?
- 6) Сколько учеников не прочитали ни одной книги?

Пусть E – множество учеников в классе.

$$m(E) = 40;$$

$$m(A) = 25;$$

$$m(B) = 22;$$

$$m(C) = 22;$$

$$m(A \cup B) = 33;$$

$$m(A \cup C) = 32;$$

$$m(B \cup C) = 31;$$

$$m(A \cap B \cap C) = 10.$$

Попробуем
иллюстрировать задачу.

Разобьем множество
учеников, прочитавших
хотя бы одну книгу, на
семь подмножеств

$k_1; k_2; k_3; k_4; k_5; k_6; k_7$.

k_1 – множество учеников,
прочитавших только
книгу A ;

k_3 – множество учеников,
прочитавших только книгу B ;

k_7 – множество учеников, прочитавших только книгу C ;

k_2 – множество учеников, прочитавших книги A и B и
не читавших книгу C ;

k_4 – множество учеников, прочитавших книги A и C и
не читавших книгу B ;

k_6 – множество учеников, прочитавших книги B и C и
не читавших книгу A ;

k_5 – множество учеников, прочитавших книги A, B и C .

Теперь понятно, на какие вопросы надо ответить с
позиции операций над множествами.

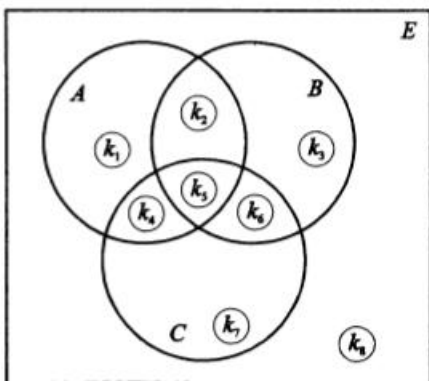
$$\left. \begin{array}{l} 1) m(k_2) = m(A \cap B) - m(A \cap B \cap C) \\ 2) m(k_4) = m(A \cap C) - m(A \cap B \cap C) \\ 3) m(k_5) = m(A \cap B \cap C) \\ 4) m(k_6) = m(B \cap C) - m(A \cap B \cap C) \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m(k_1) = m(A) - m(k_2) - m(k_4) - m(k_5).$$

Аналогично рассуждая, имеем:

$$m(k_3) = m(B) - m(k_4) - m(k_6) - m(k_5);$$

$$m(k_7) = m(C) - m(k_4) - m(k_5).$$



Найдем $m(A \cap B)$; $m(A \cap C)$; $m(B \cap C)$.

$$1) m(A \cap B) = m(A) + m(B) - m(A \cup B),$$

$$\text{т.е. } m(A \cap B) = 25 + 22 - 33 = 14.$$

$$2) m(A \cap C) = m(A) + m(C) - m(A \cup C),$$

$$\text{т.е. } m(A \cap C) = 25 + 22 - 32 = 15.$$

$$3) m(B \cap C) = m(B) + m(C) - m(B \cup C),$$

$$\text{т.е. } m(B \cap C) = 22 + 22 - 31 = 13.$$

Тогда

$$m(k_1) = 25 - 4 - 5 - 10 = 6;$$

$$m(k_3) = 22 - 4 - 3 - 10 = 5;$$

$$m(k_7) = 22 - 5 - 3 - 10 = 4;$$

$$m(A \cup B \cup C) = m(A \cup B) + m(C) - m((A \cup B) \cap C).$$

Из рисунка ясно, что

$$m(C) - m((A \cup B) \cap C) = m(k_7) = 4, \text{ тогда}$$

$$m(A \cup B \cup C) = 33 + 4 = 37 - \text{число учеников,}$$

прочитавших хотя бы одну книгу.

Так как в классе 40 учеников, то 3 ученика не прочитали ни одной книги.

Ответ: 1) 6 учеников прочли только книгу A .

2) 5 учеников прочли только книгу B .

3) 4 ученика прочли только книгу C .

4) 15 учеников прочли только по одной книге.

5) 37 учеников прочли хотя бы одну книгу из A, B, C .

6) 3 ученика не прочитали ни одной книги.

Разность двух множеств

Определение 9. Разностью двух множеств A и B называется множество, состоящее из всех элементов множества A , не принадлежащих множеству B .

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}.$$

Пример:

$$A = \{1; 3; 4; 6; 8\}; B = \{4; 5; 6; 7; 9\};$$

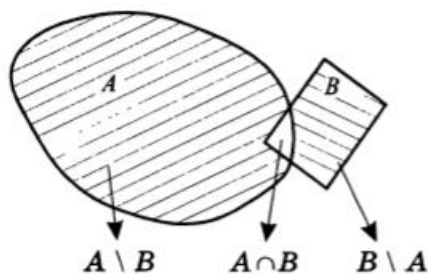
$$A \setminus B = \{1; 3; 8\}; B \setminus A = \{5; 7; 9\}.$$

Покажем графические изображения разности множеств

$A \setminus B$ в различных случаях.

$$A \setminus B = \{a \mid a \in A \wedge a \notin B\}$$

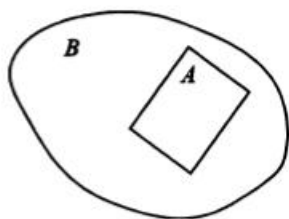
$$1. A \cap B \neq \emptyset.$$



$$2. \text{ Если } A \subset B,$$

$$\text{т.е. } \begin{cases} A \cup B = B \\ A \cap B = A \end{cases}, \text{ то } A \setminus B = \emptyset;$$

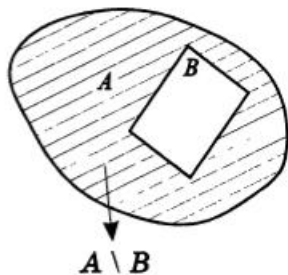
$$A \setminus B = \emptyset$$



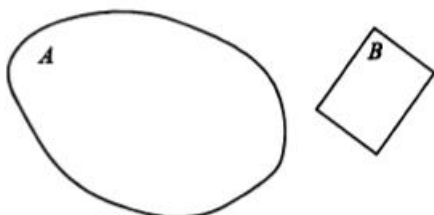
$$3. B \subset A,$$

$$\text{тогда } (A \setminus B) \cup B = A,$$

$$\text{так как } \begin{cases} A \cap B = B \\ A \cup B = A \end{cases}.$$

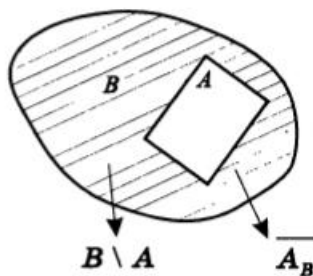


4. Если $A \cap B = \emptyset$,
то $A \setminus B = A$.



Примечание.

Если $A \subset B$, то $\overline{A_B} = B \setminus A$.



Теорема.

$$\overline{A \setminus (B \cup C)} = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$$

Доказательство:

1. Пусть $x \in (A \setminus (B \cup C))$, тогда $x \in A$ и $x \notin (B \cup C)$,
и так как $x \in A$ и $x \notin B$, то $x \in A \setminus B$, а так как $x \in A$
и $x \notin C$, то $x \in A \setminus C$.

Значит, $x \in A \setminus C$; $x \in A \setminus B$, тогда $x \in (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$,
т.е. $(A \setminus (B \cup C)) \subset ((A \setminus B) \cap (A \setminus C))$.

2. Пусть $x \in (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$, значит $x \in (A \setminus B)$ и
 $x \in (A \setminus C)$, и так как $x \in (A \setminus B)$, значит $x \in A$ и
 $x \notin B$. $x \in (A \setminus C)$, значит $x \in A$ и $x \notin C$, отсюда
 $x \in A$ и $x \notin (B \cup C)$, т.е. $x \in (A \setminus (B \cup C))$. Следова-
тельно, $((A \setminus B) \cap (A \setminus C)) \subset (A \setminus (B \cup C))$. Отсюда по
определению равенства двух множеств

$$\overline{A \setminus (B \cup C)} = (A \setminus B) \cap (A \setminus C).$$

Самостоятельно доказать:

- $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus (A \cap C)$.
- $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$.

Практикум 9**1. Дано:**

$$A = \{3; 6; 7; 8; 9; 10\};$$

$$B = \{1; 4; 6; 8; 9; 11\};$$

$$C = \{2; 3; 7; 10; 12\}.$$

Найти:

1) $(A \setminus B) \cap C =$ 2) $A \setminus (B \cap C) =$

3) $(A \setminus C) \cap B =$ 4) $C \setminus (A \setminus B) =$

5) $C \setminus (A \cap B) =$ 6) $(B \cup C) \setminus A =$

7) $(A \cup B) \setminus C =$ 8) $(A \cup C) \setminus B =$

2. Дано:

$$A = \{x \mid 1 \leq x \leq 6\};$$

$$B = \{x \mid -1 \leq x \leq 3\};$$

$$D = \{x \mid 2 \leq x \leq 5\}.$$

Найти:

1) $(A \setminus B) \cap D =$

2) $A \setminus (B \cap D) =$

3) $(A \setminus B) \cup D =$

4) $(A \setminus D) \cup B =$

Решение практикума 9

1. Дано:

$$A = \{3; 6; 7; 8; 9; 10\};$$

$$B = \{1; 4; 6; 8; 9; 11\};$$

$$C = \{2; 3; 7; 10; 12\}.$$

Найти:

$$1) (A \setminus B) \cap C = \{3; 7; 10\} \cap \{2; 3; 7; 10; 12\} = \{3; 7; 10\}.$$

$$2) A \setminus (B \cap C) = \{3; 6; 7; 8; 9; 10\} \setminus \emptyset = \{3; 6; 7; 8; 9; 10\}.$$

$$3) (A \setminus C) \cap B = \{6; 8; 9\} \cap \{1; 4; 6; 8; 9; 11\} = \{6; 8; 9\}.$$

$$4) C \setminus (A \setminus B) = \{2; 3; 7; 10; 12\} \setminus \{3; 7; 10\} = \{2; 12\}.$$

$$5) C \setminus (A \cap B) = \{2; 3; 7; 10; 12\} \setminus \{6; 8; 9\} = \{2; 3; 7; 10; 12\}.$$

$$6) (B \cup C) \setminus A = \{1; 2; 3; 4; 6; 7; 8; 9; 10; 11; 12\} \setminus \{3; 6; 7; 8; 9; 10\} = \{1; 2; 4; 11; 12\}.$$

$$7) (A \cup B) \setminus C = \{1; 3; 4; 6; 7; 8; 9; 10; 11\} \setminus \{2; 3; 7; 10; 12\} = \{1; 4; 6; 8; 9; 11\}.$$

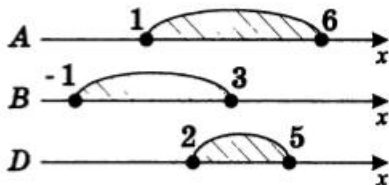
$$8) (A \cup C) \setminus B = \{2; 3; 6; 7; 8; 9; 10; 12\} \setminus \{1; 4; 6; 8; 9; 11\} = \{2; 3; 7; 10; 12\}.$$

2. Дано:

$$A = \{x \mid 1 \leq x \leq 6\};$$

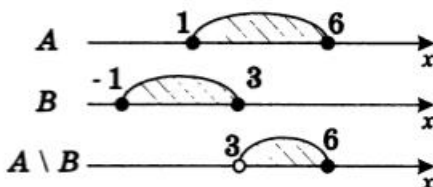
$$B = \{x \mid -1 \leq x \leq 3\};$$

$$D = \{x \mid 2 \leq x \leq 5\}.$$

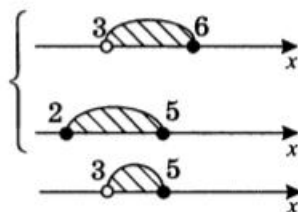


Найти:

$$1) (A \setminus B) \cap D.$$

а) $A \setminus B$ 

$$б) (A \setminus B) \cap D$$



$$(A \setminus B) \cap D$$

Ответ: $(A \setminus B) \cap D = (3; 5]$.

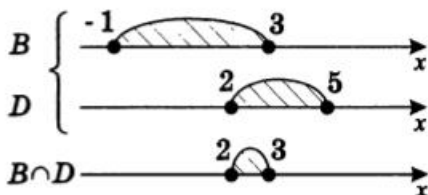
И в математической записи:

Так как $A \setminus B = (3; 6]$, то $(A \setminus B) \cap D = (3; 5] \cap [2; 5] = (3; 5]$.

Ответ: $(A \setminus B) \cap D = (3; 5]$.

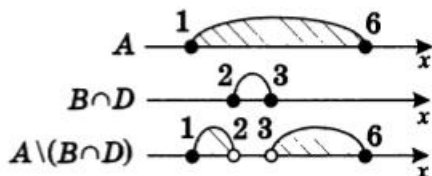
$$2) A \setminus (B \cap D)$$

а)



$$B \cap D = [2; 3]$$

б)



Ответ: $A \setminus (B \cap D) = [1; 2) \cup (3; 6]$.

И в математической записи:

Так как $B \cap D = [-1; 3] \cap [2; 5] = [2; 3]$,

то $A \setminus (B \cap D) = [1; 6] \setminus [2; 3] = [1; 2) \cup (3; 6]$.

Ответ: $A \setminus (B \cap D) = [1; 2) \cup (3; 6]$.

Примечание. Так как $(B \cap D) \subset A$, то

$$A \setminus (B \cap D) = \overline{(B \cap D)}_A.$$

$$3) (A \setminus B) \cup D.$$

Так как $A \setminus B = (3;6]$, то

$$(A \setminus B) \cup D = (3;6] \cup [2;5] = [2;6].$$

Ответ: $(A \setminus B) \cup D = [2;6]$.

$$4) (A \setminus D) \cup B.$$

Так как $D \subset A$, то $A \setminus D = \overline{D_A} = [1;2) \cup (5;6]$,

тогда

$$(A \setminus D) \cup B = [1;2) \cup (5;6] \cup [-1;3] = [-1;3] \cup (5;6].$$

Ответ: $(A \setminus D) \cup B = [-1;3] \cup (5;6]$.

Тренировочная работа 6

1. Дано:

$$A = \{1; 2; 5; 7; 9; 11\};$$

$$B = \{2; 5; 9; 10; 11\};$$

$$C = \{1; 4; 6; 7\}.$$

Найти:

1) $(A \setminus B) \cap (A \setminus C) =$

2) $(A \cap B) \setminus C =$

3) $(A \setminus B) \cup C =$

4) $(B \cup C) \setminus A =$

5) $(A \setminus B) \setminus (A \cap B) =$

2. Дано:

$$A = \{x \mid 2 \leq x \leq 7\};$$

$$B = \{x \mid -2 \leq x \leq 4\};$$

$$C = \{x \mid 3 \leq x \leq 6\}.$$

Найти:

1) $(A \setminus B) \cup C =$

2) $(A \setminus C) \cup B =$

3) $A \setminus (C \cap B) =$

4) $(A \cup B) \setminus C =$

5) $A \cup (B \setminus C) =$

Решение тренировочной работы 6

1. Дано:

$$A = \{1; 2; 5; 7; 9; 11\};$$

$$B = \{2; 5; 9; 10; 11\};$$

$$C = \{1; 4; 6; 7\}.$$

Найти:

$$1) (A \setminus B) \cap (A \setminus C) = \{1; 7\} \cap \{2; 5; 9; 11\} = \emptyset.$$

$$2) (A \cap B) \setminus C = \{2; 5; 9; 11\} \setminus \{1; 4; 6; 7\} = \{2; 5; 9; 11\}.$$

$$3) (A \setminus B) \cup C = \{1; 7\} \cup \{1; 4; 6; 7\} = \{1; 4; 6; 7\}.$$

$$4) (B \cup C) \setminus A = \{1; 2; 4; 5; 6; 7; 9; 10; 11\} \setminus \{1; 2; 5; 7; 9; 11\} = \{4; 6; 10\}.$$

$$5) (A \setminus B) \setminus (A \cap B) = \{1; 7\} \setminus \{2; 5; 9\} = \{1; 7\}.$$

2. Дано:

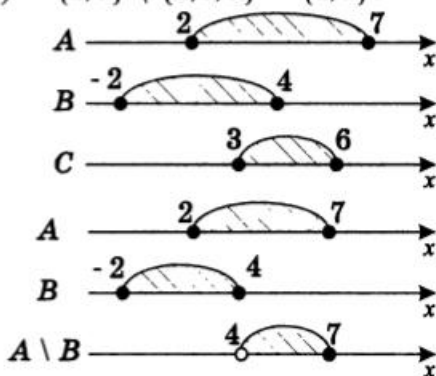
$$A = \{x \mid 2 \leq x \leq 7\};$$

$$B = \{x \mid -2 \leq x \leq 4\};$$

$$C = \{x \mid 3 \leq x \leq 6\}.$$

Найти:

$$1) (A \setminus B) \cup C.$$

Найдем $A \setminus B$.

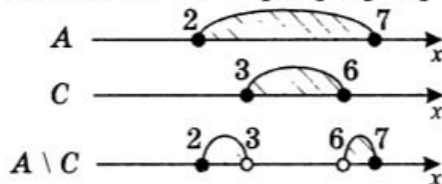
Из графической иллюстрации следует, что

$$A \setminus B = (4; 7], \text{ тогда } (A \setminus B) \cup C =$$

$$= (4; 7] \cup [3; 6] = [3; 7].$$

Ответ: $(A \setminus B) \cup C = [3; 7]$.

$$2) (A \setminus C) \cup B.$$

Найдем $A \setminus C = [2; 7] \setminus [3; 6] = [2; 3) \cup (6; 7]$.

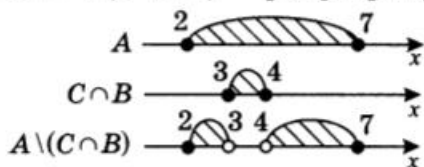
Тогда $(A \setminus C) \cup B = [2; 3) \cup (6; 7] \cup [-2; 4]$.

Ответ: $(A \setminus C) \cup B = (6; 7] \cup [-2; 4]$.

3) $A \setminus (C \cap B)$.

Так как $C \cap B = [3; 6] \cap [-2; 4] = [3; 4]$,

то $A \setminus (C \cap B) = [2; 7] \setminus [3; 4] = [2; 3) \cup (4; 7]$.

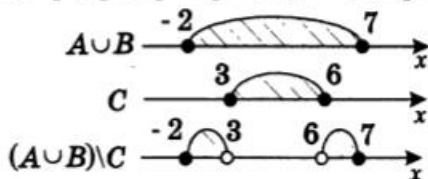


Ответ: $A \setminus (C \cap B) = [2; 3) \cup (4; 7]$.

4) $(A \cup B) \setminus C$.

Так как

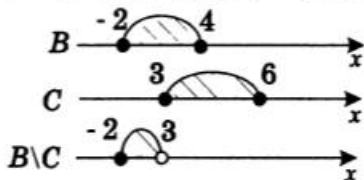
$A \cup B = [2; 7] \cup [-2; 4] = [-2; 7]$, то $(A \cup B) \setminus C =$
 $= [-2; 7] \setminus [3; 6] = [-2; 3) \cup (6; 7]$.



Ответ: $(A \cup B) \setminus C = [-2; 3) \cup (6; 7]$.

5) $A \cup (B \setminus C)$.

$B \setminus C = [-2; 4] \setminus [3; 6] = [-2; 3)$.



Значит $A \cup (B \setminus C) = [2; 7] \cup [-2; 3) = [-2; 7]$.

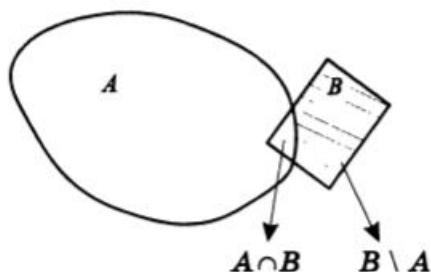
Ответ: $A \cup (B \setminus C) = [-2; 7]$.

Практикум 10

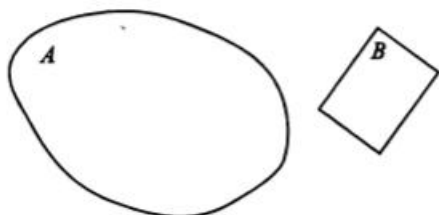
Какие условия надо наложить на A и B , чтобы были справедливы следующие утверждения?

1. $m(A) + m(B \setminus A) = m(A \cup B)$.

- 1) Если $A \cap B \neq \emptyset$, то тогда $(A \cap B) \subset A$, но $(A \cap B) \not\subset (B \setminus A)$, значит $m(A) + m(B \setminus A) = m(B \cup A)$.



- 2) Если $A \cap B = \emptyset$, тогда $B \setminus A = B$ и $m(A \cap B) = 0$,



и так как $m(A \cup B) = m(A) + m(B) - m(A \cap B)$,
то $m(A) + m(B \setminus A) = m(A \cup B)$.

В данном случае утверждение справедливо для любых A и B .

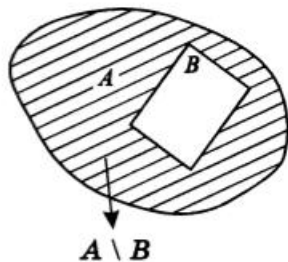
2. $m(A) - m(B) = m(A \setminus B)$,

т.е. $m(B) + m(A \setminus B) = m(A)$.

Если $B \subset A$, то $B \cap (A \setminus B) = \emptyset$
и $B \cup (A \setminus B) = A$, тогда

$$m(A) = m(B) + m(A \setminus B).$$

В других случаях это не верно.

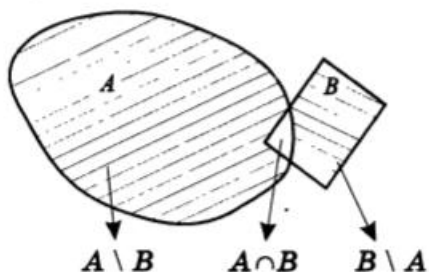


$$3. m(A) - m(B \cap A) = m(A \cup B), \text{ т.е. } m(A) = m(B \cap A) + m(A \cup B).$$

Это возможно только при $B = \emptyset$.

$$4. m(A \setminus B) + m(B \setminus A) = m(A \cup B) - m(A \cap B).$$

1) Пусть $B \cap A \neq \emptyset$.

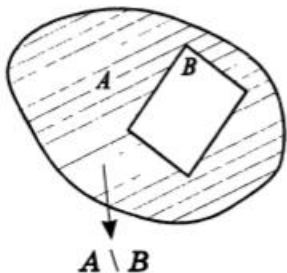


Тогда очевидно, что

$$m(A \setminus B) + m(B \setminus A) + m(A \cap B) = m(A \cup B).$$

2) Пусть $B \subset A$.

Тогда $(A \setminus B)$.



$$B \setminus A = \emptyset; \quad m(B \setminus A) = 0;$$

$$A \cap B = B; \quad m(A \cap B) = m(B);$$

$$A \cup B = A; \quad m(A \cup B) = m(A).$$

Тогда действительно

$$\begin{aligned} m(A \setminus B) + m(B \setminus A) + m(A \cap B) &= \\ &= m(A \setminus B) + 0 + m(B) = m(A \cup B). \end{aligned}$$

т.е. истина.

3) При $A \subset B$ доказательство аналогичное.

4) При $A \cap B = \emptyset$.

$$m(A \setminus B) = m(A);$$

$$m(B \setminus A) = m(B);$$

$$m(A \cap B) = 0;$$

$$m(A \cup B) = m(A) + m(B);$$

$$\text{Тогда } m(A \setminus B) + m(B \setminus A) + m(A \cap B) = m(A \cup B).$$

5) $A = B$ (это частный случай при $B \subset A$).

$$A \setminus B = \emptyset;$$

$$B \setminus A = \emptyset;$$

$$A \cup B = A = B;$$

$$A \cap B = A = B;$$

$$m(A \setminus B) = 0;$$

$$m(B \setminus A) = 0;$$

$$m(A \cup B) = m(A \cap B).$$

$$\text{Тогда } 0 + 0 + m(A \cap B) = m(A \cup B),$$

что и требовалось доказать.

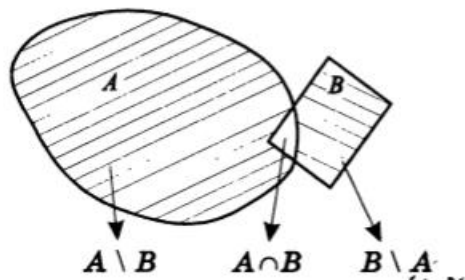
Итак, это утверждение

$$\boxed{m(A \setminus B) + m(B \setminus A) = m(A \cup B) - m(A \cap B)}$$

— есть теорема, справедливая для любых A и B .

$$5. m((A \cup B) \setminus (A \cap B)) = m(A \setminus B) + m(B \setminus A).$$

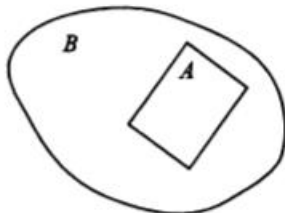
Пусть $A \cap B \neq \emptyset$. Тогда изобразим $(A \cup B) \setminus (A \cap B)$.



Из графической иллюстрации следует истинность утверждения $m((A \cup B) \setminus (A \cap B)) = m(A \setminus B) + m(B \setminus A)$.

Аналогичны случаи:

1) $A \subset B$



Тогда

а) $A \cap B = A$;

$A \cup B = B$;

$A \setminus B = \emptyset$; $m(A \setminus B) = 0$; $B \setminus A \neq \emptyset$,

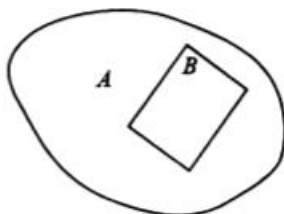
значит $m(A \setminus B) + m(B \setminus A) = m(B \setminus A)$.

б) $(A \cup B) \setminus (A \cap B) = B \setminus A$,

значит $m((A \cup B) \setminus (A \cap B)) = m(B \setminus A)$.

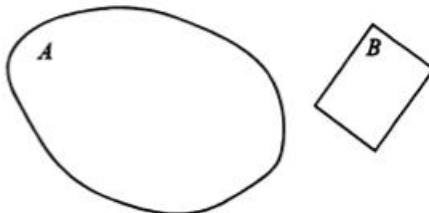
Утверждение верно.

2) $B \subset A$.



Рассуждения аналогичные.

3) $A \cap B = \emptyset$.



а) $(A \cup B) \setminus (A \cap B) = A \cup B$; ($A \cap B = \emptyset$);

б) $A \setminus B = A$; $m(A \setminus B) = m(A)$;

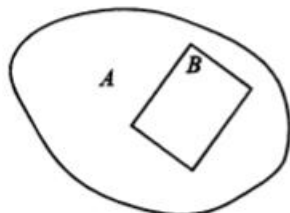
$B \setminus A = B$; $m(B \setminus A) = m(B)$.

Итак, $m((A \cup B) \setminus (A \cap B)) = m(A \setminus B) + m(B \setminus A)$.

Это справедливо для любых A и B .

6. $m(B \setminus A) + m(A) = m(B)$.

Пусть $B \subset A$.



Тогда

$$B \cap A = B; \quad m(B \cap A) = m(B);$$

$$B \cup A = A; \quad m(B \cup A) = m(A);$$

$$\text{Тогда } m(B \setminus A) = m(B) - m(A).$$

В других случаях утверждение ложно.

Тренировочная работа 7

1. Дано:

$$A = \{3; 6; 7; 8; 9; 10\};$$

$$B = \{1; 4; 6; 8; 9; 11\};$$

$$C = \{2; 3; 7; 10; 12\}.$$

Найти:

1) $C \setminus (A \setminus B) =$

2) $B \setminus (A \setminus C) =$

3) $(A \setminus B) \setminus (A \setminus C) =$

4) $(A \cup B) \setminus (A \setminus B) =$

5) $(B \cup C) \setminus A =$

2. Дано:

$$A = \{1; 2; 5; 7; 9; 11\};$$

$$B = \{2; 5; 9; 10\};$$

$$C = \{1; 4; 6; 7\}.$$

Найти:

1) $(A \setminus B) \cap (A \setminus C) =$

2) $(A \cap B) \setminus C =$

3) $(A \setminus B) \cup C =$

4) $(B \setminus C) \setminus A =$

5) $(A \setminus B) \setminus (A \cap B) =$

3. Какое условие надо наложить на A , C и B , чтобы были справедливы следующие утверждения?

1) $m(B) + m(A \setminus B) = m(A \cup B).$

2) $m(B \setminus A) + m(A) = m(B).$

3) $m(C) + m(B) > m(C \cup B).$

Решение тренировочной работы 7**1. Дано:**

$$A = \{3; 6; 7; 8; 9; 10\};$$

$$B = \{1; 4; 6; 8; 9; 11\};$$

$$C = \{2; 3; 7; 10; 12\}.$$

Найти:

$$1) C \setminus (A \setminus B) = C \setminus \{3; 7; 10\} = \{2; 12\}.$$

$$2) B \setminus (A \setminus C) = B \setminus \{6; 8; 9\} = \{1; 4; 11\}.$$

$$3) (A \setminus B) \setminus (A \setminus C) = \{3; 7; 10\} \setminus \{6; 8; 9\} = \{3; 7; 10\}.$$

$$4) (A \cup B) \setminus (A \setminus B) = \\ = \{1; 3; 4; 6; 7; 8; 9; 10; 11\} \setminus \{3; 7; 10\} = \\ = \{1; 4; 6; 8; 9; 11\}.$$

$$5) (B \cup C) \setminus A = \{1; 2; 3; 4; 6; 7; 8; 9; 10; 11; 12\} \setminus A = \\ = \{1; 2; 4; 11; 12\}.$$

2. Дано:

$$A = \{1; 2; 5; 7; 9; 11\};$$

$$B = \{2; 5; 9; 10\};$$

$$C = \{1; 4; 6; 7\}.$$

Найти:

$$1) (A \setminus B) \cap (A \setminus C) = \{1; 7; 11\} \cap \{2; 5; 9; 11\} = \{11\}.$$

$$2) (A \cap B) \setminus C = \{2; 5; 9\} \setminus C = \{2; 5; 9\}.$$

$$3) (A \setminus B) \cup C = \{1; 7; 11\} \cup C = \{1; 4; 6; 7; 11\}.$$

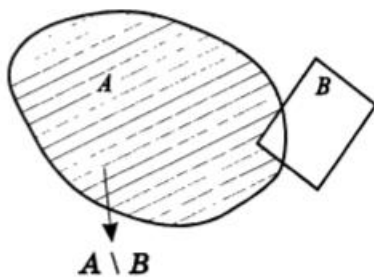
$$4) (B \cup C) \setminus A = \{1; 2; 4; 5; 6; 7; 9; 10\} \setminus A = \{4; 6; 10\}.$$

$$5) (A \setminus B) \setminus (A \cap B) = \{1; 7; 11\} \setminus \{2; 5; 9\} = \{1; 7; 11\}.$$

3. Какое условие надо наложить на A и B , чтобы были справедливы утверждения?

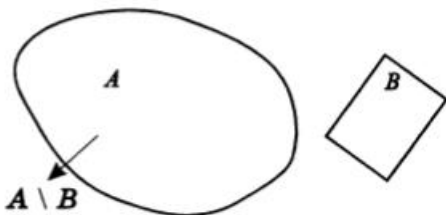
1) $m(B) + m(A \setminus B) = m(A \cup B)$;

а) $A \cap B \neq \emptyset$.



Утверждение верно.

б) $A \cap B = \emptyset$.



Очевидно, что $m(A \setminus B) = m(A)$.

Значит, в этом случае утверждение справедливо.

Итак, для любых A и B
 $m(B) + m(A \setminus B) = m(A \cup B)$.

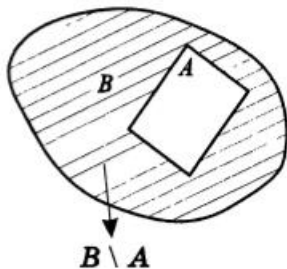
2) $m(B \setminus A) + m(A) = m(B)$.

Пусть $A \subset B$.

Тогда

$$\begin{cases} A \cap B = A; \\ A \cup B = B. \end{cases}$$

Утверждение в данном случае справедливо, в остальных случаях – нет.



3) $m(C) + m(B) > m(C \cup B)$.

Если $C \cap B \neq \emptyset$, то утверждение справедливо при любых C и B .

Проверочная работа 2

1. $A = \{1; 2; 4; 5; 7; 8; 10; 11\};$

$B = \{2; 3; 5; 6; 8; 9; 11\};$

$D = \{1; 3; 4; 6; 7; 9; 10\}.$

1) $(A \setminus B) \cap D =$

2) $A \setminus (B \cap D) =$

3) $(A \setminus B) \cup D =$

4) $(A \setminus D) \cup B =$

5) $(A \setminus D) \cap B =$

6) $(D \cup B) \setminus A =$

7) $(A \cup B) \setminus D =$

8) $A \cup (B \setminus D) =$

2. $A = \{x | x \geq 3\};$

$B = \{x | x \geq 2 \cup x \leq -2\};$

$C = \{x | -4 < x < 4\}.$

1) $A \cup B \cup C =$

2) $A \cap B \cap C =$

3) $A \cup (B \cap C) =$

4) $A \setminus B =$

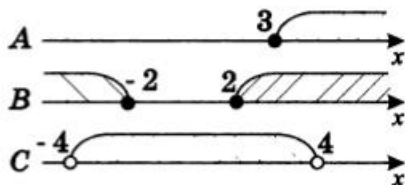
5) $A \cup (C \setminus B) =$

6) $A \cap (C \setminus B) =$

7) $(A \setminus B) \cap (B \setminus C) =$

8) $(A \setminus B) \setminus C =$

9) $(A \cup B) \setminus (A \cap B) =$



10) $(A \cup B) \cap C =$

11) $A \cap (B \cup C) =$

12) $(A \cap B) \cup C =$

13) $B \setminus C =$

14) $(A \cup C) \setminus B =$

15) $(A \cap C) \setminus B =$

16) $(A \cap C) \setminus (B \cap C) =$

17) $(A \setminus C) \setminus (B \setminus C) =$

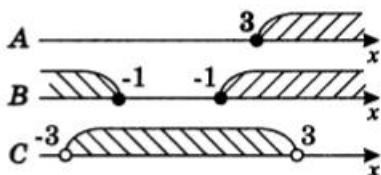
18) $(A \cup C) \setminus (A \cap B) =$

Тренировочная работа 8

1. $A = \{x | x \geq 2\};$

$B = \{x | x \geq 1 \cup x \leq -1\};$

$C = \{x | -3 < x < 3\}.$



1) $A \cup B \cup C =$

2) $A \cap B \cap C =$

3) $A \cup (B \cap C) =$

4) $B \setminus A =$

5) $A \cup (C \setminus B) =$

6) $A \cap (C \setminus B) =$

7) $(A \setminus C) \cap (B \setminus C) =$

8) $(A \setminus B) \setminus C =$

9) $(A \cup B) \setminus (A \cap B) =$

10) $(A \cup B) \cap C =$

11) $A \cap (B \cup C) =$

12) $(A \cap B) \cup C =$

13) $B \setminus C =$

14) $(A \cup C) \setminus B =$

15) $A \setminus (A \cap C) =$

16) $(B \cap C) \setminus (A \cap C) =$

17) $(B \setminus C) \setminus (A \setminus C) =$

18) $(A \cup C) \setminus (A \cap B) =$

2. $A = \{1; 3; 5; 9\};$

$B = \{2; 4; 10\};$

$E = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10\}.$

1) $A \cup \bar{B} =$

2) $\bar{A} \cap B =$

3) $\overline{A \cup B} =$

4) $\bar{A} \cup \bar{B} =$

5) $A \cap \bar{B} =$

6) $\overline{A \cup B} =$

7) $\overline{A \cap B} =$

8) $(\bar{A} \cap B) \cup (A \cap \bar{B}) =$

9) $(A \cup \bar{B}) \cap (\bar{A} \cup B) =$

10) $\overline{(A \cap B) \cup (\bar{A} \cap \bar{B})} =$

11) $E \setminus (A \cup B) =$

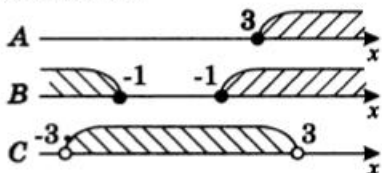
12) $(E \cap A) \setminus B =$

Решение тренировочной работы 8

1. $A = \{x | x \geq 2\};$

$B = \{x | x \geq 1 \cup x \leq -1\};$

$C = \{x | -3 < x < 3\}.$



1) $A \cup B \cup C = (-\infty; \infty).$

2) $A \cap B \cap C = [2; 3).$

3) $A \cup (B \cap C) = A \cup (-3; -1] \cup [1; 3) = (-3; -1] \cup [1; \infty).$

4) $B \setminus A = ((-\infty; -1] \cup [1; \infty)) \setminus [2; \infty) = (-\infty; -1] \cup [1; 2).$

5) $A \cup (C \setminus B) = [2; \infty) \cup (-1; 1).$

6) $A \cap (C \setminus B) = [2; \infty) \cap (-1; 1) = \emptyset.$

7) $(A \setminus C) \cap (B \setminus C) = [3; \infty) \cap ((-\infty; -3] \cup [3; \infty)) = [3; \infty).$

8) $(A \setminus B) \setminus C = \emptyset \setminus C = \emptyset.$

9) $(A \cup B) \setminus (A \cap B) = B \setminus A = (-\infty; -1] \cup [1; 2)$

(так как $A \cup B = B$ и $A \cap B = A$).

10) $(A \cup B) \cap C = ((-\infty; -1] \cup [1; \infty)) \cap (-3; 3) = (-3; -1] \cup [1; 3).$

11) $A \cap (B \cup C) = A \cap (-\infty; \infty) = [2; \infty)$
($B \cup C = (-\infty; \infty)$).

12) $(A \cap B) \cup C = [2; \infty) \cup (-3; 3) = (-3; \infty).$

13) $B \setminus C = (-\infty; -3] \cup [3; \infty).$

14) $(A \cup C) \setminus B = (-3; \infty) \setminus B = (-1; 1).$

15) $A \setminus (A \cap C) = [2; \infty) \setminus [2; 3) = [3; \infty).$

16) $(B \cap C) \setminus (A \cap C) = ((-3; -1] \cup [1; 3)) \setminus [2; 3) = (-3; -1] \cup [1; 2).$

17) $(B \setminus C) \setminus (A \setminus C) = (([3; \infty) \cup (-\infty; -3]) \setminus [3; \infty)) = (-\infty; -3].$

18) $(A \cup C) \setminus (A \cap B) = (-3; \infty) \setminus [2; \infty) = (-3; 2).$

$$2. A = \{1; 3; 5; 9\};$$

$$B = \{2; 4; 10\};$$

$$E = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10\}.$$

$$1) A \cup \bar{B} = A \cup \{1; 3; 5; 6; 7; 8; 9\} = \{1; 3; 5; 6; 7; 8; 9\}.$$

$$2) \bar{A} \cap B = \{2; 4; 6; 7; 8; 10\} \cap B = \{2; 4; 10\}.$$

$$3) \overline{A \cup B} = \overline{\{1; 2; 3; 4; 5; 9; 10\}} = \{6; 7; 8\}.$$

$$4) \bar{A} \cup \bar{B} = \{2; 4; 6; 7; 8; 10\} \cup \{1; 3; 5; 6; 7; 8; 9\} = E.$$

$$5) A \cap \bar{B} = A \cap \{1; 3; 5; 6; 7; 8; 9\} = \{1; 3; 5; 9\}.$$

$$6) \overline{A \cup \bar{B}} = \overline{\{1; 3; 5; 6; 7; 8; 9\}} = \{2; 4; 10\}.$$

$$7) \overline{A \cap B} = \bar{\emptyset} = E.$$

$$8) (\bar{A} \cap B) \cup (A \cap \bar{B}) = \{2; 4; 10\} \cup \{1; 3; 5; 9\} = \\ = \{1; 2; 3; 4; 5; 9; 10\}.$$

$$9) (A \cup \bar{B}) \cap (\bar{A} \cup B) = \{1; 3; 5; 6; 7; 8; 9\} \cap \{2; 4; 6; 7; 8; 10\} = \\ = \{6; 7; 8\}.$$

$$10) \overline{(A \cap B) \cup (\bar{A} \cap \bar{B})} = \overline{\emptyset \cup \{6; 7; 8\}} = \{1; 2; 3; 4; 5; 9; 10\}.$$

$$11) E \setminus (A \cup B) = E \setminus \{1; 2; 3; 4; 5; 9; 10\} = \{6; 7; 8\}.$$

$$12) (E \cap A) \setminus B = \{1; 3; 5; 9\}.$$

Проверочная работа 3

1. Решить неравенства.

$$1) \begin{cases} x \geq 3 \\ x > 4 \end{cases} .$$

$$\begin{cases} x < 5 \\ x \leq 6 \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} x < 3 \\ x \leq 4 \end{cases} .$$

$$\begin{cases} x > 5 \\ x \geq 6 \end{cases}$$

3) $\frac{(x+1)^2}{(x+3)(x-2)} \leq 0 .$

4) $\frac{(x+1)^2}{(x-3)(x+2)} \geq 0 .$

5) $\frac{(x+3)(x-2)}{(x+1)^2} \leq 0 .$

6) $x^2(x-3)(x+2) \geq 0 .$

7) $(x^2-4)^2 + (x^2-2x-8)^2 \leq 0 .$

8) $\frac{(x+2)(1-x)}{(x^2-9)^2 + (x^2-2x-3)^2} \leq 0 .$

2. $A = \{1; 3; 5; 8; 9; 10\};$

$B = \{2; 4; 6; 8; 9\};$

$E = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10\} .$

1) $A \cap \overline{B} =$

2) $\overline{A} \cup B =$

3) $\overline{A \cup B} =$

4) $\overline{A} \cup \overline{B} =$

5) $\overline{A \cap B} =$

6) $\overline{A \cup B} =$

7) $(A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap B) =$

8) $(\bar{A} \cup B) \cap (A \cup \bar{B}) =$

9) $E \setminus (A \cup B) =$

10) $E \setminus (A \cap \bar{B}) =$

11) $(E \setminus A) \cap (E \setminus B) =$

12) $(E \setminus \bar{A}) \cap (E \setminus \bar{B}) =$

3. Решите задачу.

В течение недели в кинотеатре шли фильмы A , B и C . Каждый из 40 школьников видел либо все три фильма, либо один из трех.

Фильм A видели 13 школьников.

Фильм B видели 16 школьников.

Фильм C видели 19 школьников.

Сколько школьников видели все три фильма?

Зачетная работа 3

1. Решить неравенства.

1)
$$\begin{cases} x \leq 3 \\ x < 4 \\ x > 5 \\ x \geq 6 \end{cases}$$

2)
$$\begin{cases} x > 3 \\ x \geq 4 \\ x < 5 \\ x \leq 6 \end{cases}$$

3)
$$\frac{(x-1)^2}{(x-3)(x+2)} \geq 0.$$

4)
$$\frac{(x+1)^2}{(x+3)(x-2)} \geq 0.$$

5)
$$\frac{(x-3)(x+2)}{(x-1)^2} \leq 0.$$

6)
$$(4-x)^2(x-1)(x+2) \leq 0.$$

7)
$$(x^3 - 9x)^2 + (x^3 - 3x^2)^2 > 0.$$

8)
$$\frac{-(x+2)(4+x)}{(x^2-1)^2 + (x^2-3x-4)^2} \leq 0.$$

2. $A = \{3; 5; 7; 10\};$

$B = \{1; 6; 9; 10; 12\};$

$E = \{1; 3; 5; 6; 7; 9; 10; 11; 12\}.$

1) $A \cap \overline{B} =$

2) $\overline{A} \cup B =$

3) $\overline{A \cup B} =$

4) $\overline{A} \cup \overline{B} =$

5) $\overline{A \cap B} =$

6) $\overline{A \cup B} =$

7) $(A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap B) =$

8) $(\bar{A} \cup B) \cap (A \cup \bar{B}) =$

9) $E \setminus (A \cup B) =$

10) $E \setminus (A \cap \bar{B}) =$

11) $(E \setminus A) \cap (E \setminus B) =$

12) $(E \setminus \bar{A}) \cap (E \setminus \bar{B}) =$

3. В течение недели в кинотеатре шли фильмы A , B и C . Каждый из 40 школьников видел, либо все три фильма, либо один из трех.

Фильм A видели 13 школьников.

Фильм B видели 16 школьников.

Фильм C видели 19 школьников.

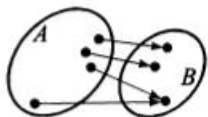
Сколько школьников видели только по одному фильму?

2

ФУНКЦИИ

Введение

Определение 1. Под функцией мы будем понимать такой закон или правило соответствия между элементами множеств A и B , по которому каждому элементу множества A соответствует вполне определенный элемент из множества B .



Практикум 11

Рассмотрим примеры различных соответствий и выясним, какие из них являются функциями.

Пример 1.

Стрелочками указывается, какой эле-

$$\begin{array}{l} A = \{1; 2; 4; 6\} \\ \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\ B = \{3; 7; 9; 11; 12\} \end{array}$$

мент из множества A переходит в элемент множества B . Все переходы образуют соответствия. В данном случае это будет **функциональное** соответствие. Почему? Потому что: во-первых, все элементы из множества A использованы; во-вторых, каждому элементу из множества A соответствует вполне определенный элемент из множества B , т.е. нет элемента из множества A , который бы занял два места в множестве B . (Так же как один человек может сесть только на один стул и не может сесть одновременно на два стула, стоящих в разных углах большого зала.

А то, что не все элементы из множества B использованы, так в определении функции этого требования нет.)

$$\begin{array}{l} \text{Пример 2. } A = \{1; 2; 5; 7; 10\} \\ \quad \quad \quad \downarrow \quad \downarrow \\ B = \{2; 9\} \end{array}$$

Данное соответствие является функцией, так как: все элементы из множества A использованы; то, что часть элементов из множества A переходит в один и тот же элемент множества B , не противоречит определению.

(Действительно, несколько человек могут сесть на один и тот же диван.)

$$\begin{array}{l} \text{Пример 3. } A = \{1; 3; 4; 7; -10\} \\ \quad \quad \quad \downarrow \downarrow \downarrow \downarrow \\ B = \{4; 7; 11; 12\} \end{array}$$

Данное соответствие функцией не является, так как для элемента 7 из множества A не нашлся элемент из множества B , в который он перешел.

$$\begin{array}{l} \text{Пример 4. } A = \{1; 3; 5\} \\ \quad \quad \quad \downarrow \quad \downarrow \downarrow \downarrow \\ B = \{2; 4; 6; 7\} \end{array}$$

Данное соответствие функцией не является, так как нашлся элемент $3 \in A$, который переходит сразу в два элемента из множества B .

Теперь, естественно, договоримся, что понимать под областью определения функционального соответствия (функции).

Определение 2. Под областью определения функции мы будем понимать все элементы из множества A и обозначать ее $D(f)$ (или $D(y)$), где $y = f(x)$ – функциональное соответствие.

Определение 3. Под областью значений функционального соответствия (функции), или областью изменения функции мы будем понимать множество всех элементов из множества B , для которых нашлись элементы из множества A , которые в них перешли. Обозначим это множество $E(f)$.

Примечание. Область изменения функции $E(f)$ может не совпадать с B .

Пример 5.

Рассмотрим функцию из примера 1.

$$E(f) = \{3; 7; 9; 11\},$$

где $B = \{3; 7; 9; 11; 12\}$, $E(f) \subset B$ (всегда),

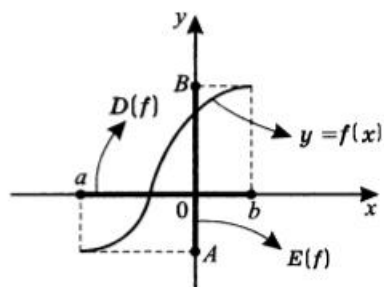
но $E(f) \neq B$.

Определение 4. Множество всех точек плоскости, координаты которых удовлетворяют функциональному равенству $y = f(x)$, называется **графиком функции**,

т.е. $\Gamma(y = f(x)) = \{(x_0; y_0) | y_0 = f(x_0)\}$ (Γ – график).

Рассмотрим на графике функции иллюстрацию того, что такое $D(f)$ и $E(f)$. Итак,

$$[a; b] = D(f), \text{ а } [A; B] = E(f)$$



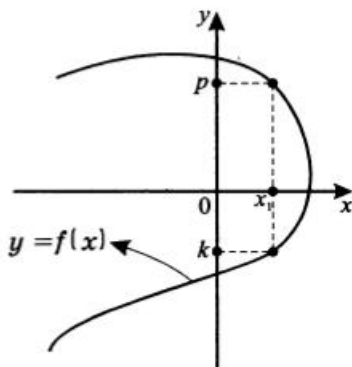
Рассмотрим примеры нефункциональных соответствий, чтобы лучше понять, что такое функция.

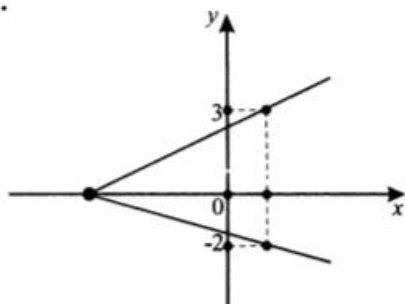
Пример 6.

$$\text{Здесь } \begin{cases} f(x_1) = p \\ f(x_1) = k \end{cases},$$

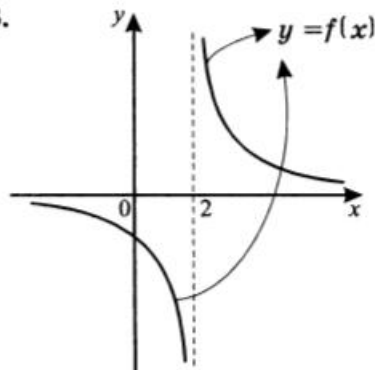
где $p \neq k$.

Значит данный пример – график, который не является функциональным, так как нашелся x , который переходит сразу в два элемента – p и k .



Пример 7.

Вопрос: является ли данный график соответствия функциональным? Ответ – нет. По аналогичным причинам это соответствие не является функциональным.

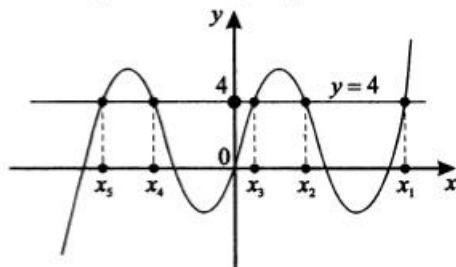
Пример 8.

Это пример графика соответствия, которое, во-первых, является функцией, и, во-вторых, график которого состоит из двух ветвей.

Интересно, что $D(f) = (-\infty; 2) \cup (2; \infty)$. Значение $x = 2 \notin D(f)$, т.е. для $x = 2$ нет элемента, в который он перейдет.

Пример 9.

Здесь интересно то, что элементы $x_1; x_2; x_3; x_4; x_5$ переходят в один элемент $y = 4$ соответственно. Это пример графика функционального соответствия.



Тренировочная работа 9

1. Даны соответствия. Выяснить, какие из них являются функциональными, а какие нет.

1) $A = \{2; 7; 10; 11\}$

$B = \{4; 6; 8; 9\}$

2) $A = \{2; 7; 10; 11\}$

$B = \{4; 6; 8\}$

3) $A = \{1; 4; 6; 9; 12\}$

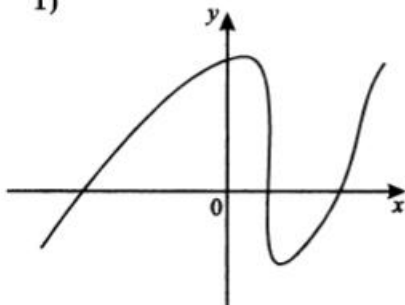
$B = \{4; -2; 3; -1\}$

4) $A = \{2; 4; 6; 7\}$

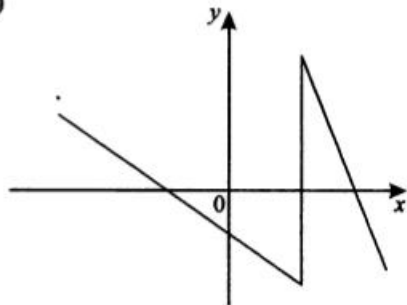
$B = \{1; 4; 5; 10\}$

2. Даны графики соответствий. Какие из них являются функциональными, а какие нет?

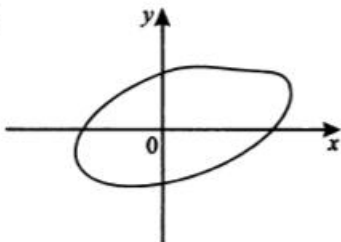
1)



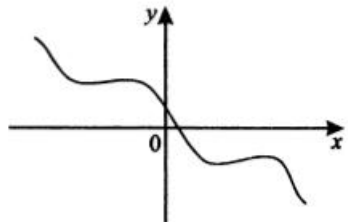
2)



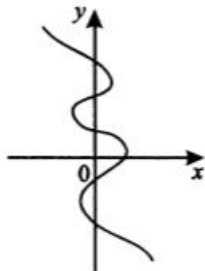
3)



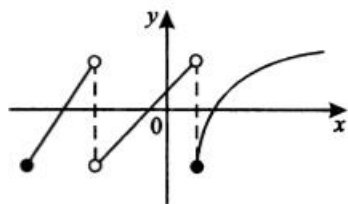
4)

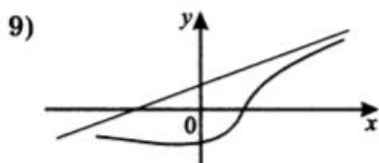
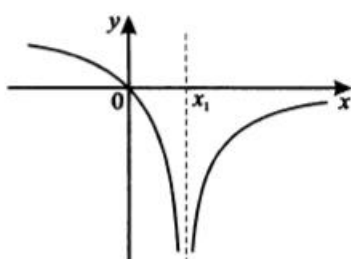
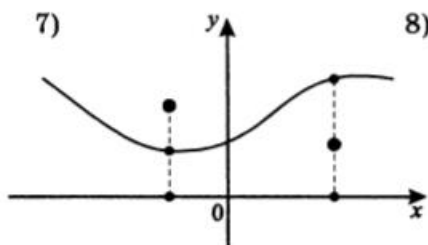


5)

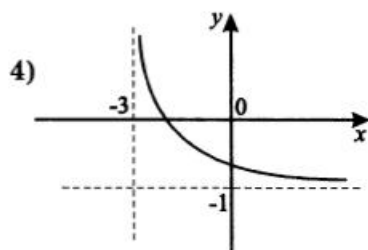
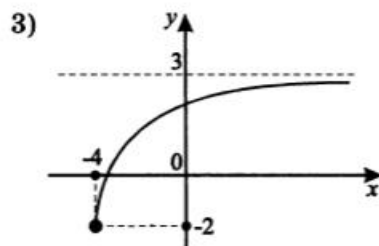
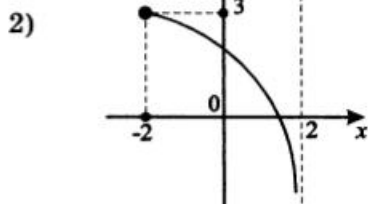
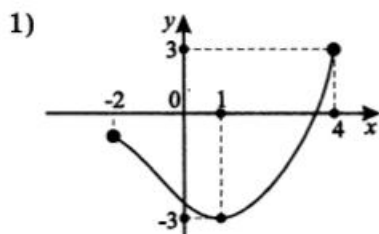


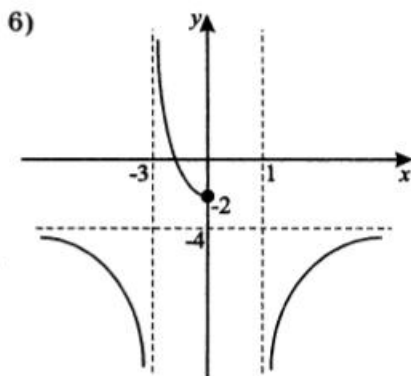
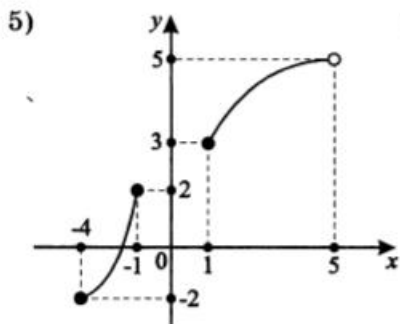
6)





3. По графику определить $D(f)$ и $E(f)$.





Ответы на тренировочную работу 9

1. 1) да; 2) нет; 3) да; 4) нет;

2. 1) нет; 2) нет; 3) нет; 4) да;
5) нет; 6) да; 7) нет; 8) да; 9) нет.

3. 1) $D(f) = [-2; 4]$; $E(f) = [-3; 3]$.

2) $D(f) = [-2; 2]$; $E(f) = (-\infty; 3]$.

3) $D(f) = [-4; \infty)$; $E(f) = [-2; 3]$.

4) $D(f) = (-3; \infty)$;

$E(f) = (-1; \infty)$.

5) $D(f) = [-4; -1] \cup [1; 5]$;

$E(f) = [-2; 2] \cup [3; 5]$.

6) $D(f) = (-\infty; -3) \cup (-3; 0] \cup (1; \infty)$;

$E(f) = (-\infty; -4) \cup [-2; \infty)$.

Специальные функции

Рассмотрим некоторые специальные функции и их графики.

Определение. *Целой частью числа называется наибольшее целое число, не превосходящее само число. Обозначается $[x]$ (функция целой части).*

Примеры. $[2,5] = 2$; $[4\frac{2}{3}] = 4$; $[-2,7] = -3$.

Построим график $y = [x]$.

Если $0 \leq x < 1$, то $[x] = 0$;

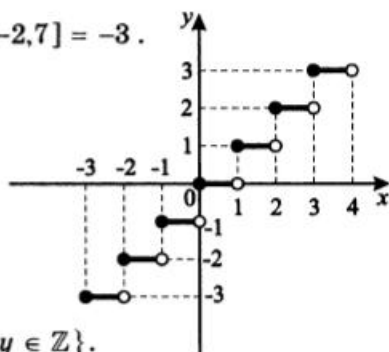
$1 \leq x < 2$, то $[x] = 1$;

$2 \leq x < 3$, то $[x] = 2$;

$-1 \leq x < 0$, то $[x] = -1$;

$-2 \leq x < -1$, то $[x] = -2$;

$D([x]) = (-\infty; \infty)$; $E([x]) = \{y \mid y \in \mathbb{Z}\}$.



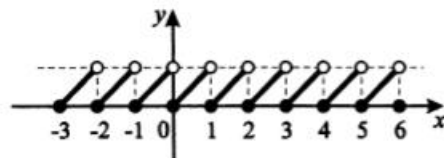
Определение. *Дробной частью числа называется разность между самим числом и его целой частью.*

Обозначается $\{x\} = x - [x]$.

Примеры.

$$\{4,72\} = 4,72 - [4,72] = 4,72 - 4 = 0,72.$$

$\{-3,74\} = -3,74 - [-3,74] = -3,74 - (-4) = 0,26$, т.е. дробная часть всегда положительна. Построим график $y = \{x\}$.



Пусть $0 \leq x < 1$, то $\{x\} = x$;

$1 \leq x < 2$, то $\{x\} = x - 1$;

$2 \leq x < 3$, то $\{x\} = x - 2$;

$-1 \leq x < 0$, то $\{x\} = x + 1$;

$-2 \leq x < -1$, то $\{x\} = x + 2$;

$D(\{x\}) = (-\infty; \infty)$; $E(\{x\}) = [0; 1)$.

3

Последовательности

Введение

Определение. *Последовательностью называется функция натурального аргумента, т.е. функция, область определения которой является подмножеством множества всех натуральных чисел.*

Можно дать и иное определение.

Определение. *Последовательностью называется занумерованный ряд чисел. Естественно, два данных определения равнозначны, или равносильны.*

Рассмотрим примеры последовательностей.

- | | |
|---|--|
| 1. $1; 4; 5; 7; 9; 10; 20; \dots$ | 6. $\frac{1}{2}; \frac{2}{3}; \frac{3}{4}; \frac{4}{5}; \frac{5}{6}; \dots$ |
| 2. $\frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4}; \frac{1}{5}; \dots; \frac{1}{n}; \dots$ | 7. $1; 3; 7; 13; 19; 29; \dots$ |
| 3. $-n; -\frac{1}{2}n; -\frac{1}{3}n; \dots$ | 8. $\frac{1}{2 \cdot 3}; \frac{1}{3 \cdot 4}; \frac{1}{4 \cdot 5}; \frac{1}{5 \cdot 6}; \dots$ |
| 4. $\frac{1}{5}; -\frac{1}{5}; \frac{1}{5}; -\frac{1}{5}; \frac{1}{5}; -\frac{1}{5}; \dots$ | 9. $\frac{1}{1+2}; \frac{3}{4+5}; \frac{6}{7+8}; \frac{9}{10+11}; \dots$ |
| 5. $2^2; 3^2; 4^2; 5^2; \dots; n^2$ | 10. $\frac{1}{2}; -\frac{1}{3}; \frac{1}{4}; -\frac{1}{5}; \frac{1}{6}; -\frac{1}{7}; \dots$ |

Если нам удастся угадать, или мы знаем закон, по которому образуются члены этой последовательности, то можно написать функциональную зависимость аналитически (если это возможно вообще).

Практикум 12

1. Проверьте аналитическую форму n -го члена последовательности для приведенных на стр. 93 последовательностей:

2) $a_n = \frac{1}{n+1}$, где $n \in \mathbb{N}$;

3) $a_k = -\frac{n}{k}$, где $k \in \mathbb{N}$; $n \in \mathbb{N}$, где n – постоянная;

4) $a_n = (-1)^{n+1} \frac{1}{5}$, где $n \in \mathbb{N}$.

2. Попробуйте сами угадать и проверьте предлагаемую закономерность для последовательностей:

5) $2^2; 3^2; 4^2; 5^2; \dots; n^2$;

6) $\frac{1}{2}; \frac{2}{3}; \frac{3}{4}; \frac{4}{5}; \frac{5}{6}; \dots$;

8) $\frac{1}{2 \cdot 3}; \frac{1}{3 \cdot 4}; \frac{1}{4 \cdot 5}; \frac{1}{5 \cdot 6}; \dots$;

10) $\frac{1}{2}; -\frac{1}{3}; \frac{1}{4}; -\frac{1}{5}; \frac{1}{6}; -\frac{1}{7}; \dots$

Ответы: 5) $a_n = (n + 1)^2$; $n \in \mathbb{N}$;

6) $a_n = \frac{n}{n+1}$; $n \in \mathbb{N}$;

8) $a_n = \frac{1}{(n+1)(n+2)}$; $n \in \mathbb{N}$;

10) $a_n = (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{n+1}$; $n \in \mathbb{N}$.

Классификация и виды последовательностей

Вопрос. Каким общим свойством обладают последовательности 1, 3, 5 (см. стр. 93)?

Ответ: для этих последовательностей характерно то, что каждый последующий их член больше предыдущего. Учитывая, что эти свойства могут существенно характеризовать последовательность, дадим определение.

Определение 1. Последовательность a_n называется *строго возрастающей*, если каждый последующий ее член больше предыдущего, т.е. для $\forall n \in \mathbb{N} \quad a_{n+1} > a_n$.

Определение 2. Последовательность a_n называется *строго убывающей*, если каждый последующий ее член меньше предыдущего, т.е. для $\forall n \in \mathbb{N} \quad a_{n+1} < a_n$.

Примечания.

Если для $\forall n \in \mathbb{N} \quad a_{n+1} \geq a_n$ – последовательность называется *возрастающей* в широком смысле или *неубывающей*.

Если для $\forall n \in \mathbb{N} \quad a_{n+1} \leq a_n$ – последовательность называется *убывающей* в широком смысле или *невозрастающей*.

Последовательности строго возрастающие или строго убывающие называются *строго монотонными*.

Последовательности невозрастающие или неубывающие называются *монотонными* в широком смысле.

Практикум 13

1. Пусть $a_n = \frac{2n}{n+1}$. Выясним, какая это последовательность, возрастающая или убывающая. Уточним, чему равен a_{n+1} ; для этого вместо n в $a_n = \frac{2n}{n+1}$ подставим $n+1$, т.е. $a_{n+1} = \frac{2(n+1)}{(n+1)+1}$; значит $a_{n+1} = \frac{2(n+1)}{n+2}$.

Рассмотрим разность:

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= \frac{2(n+1)}{n+2} - \frac{2n}{n+1} = \frac{2[(n+1)^2 - n(n+2)]}{(n+2)(n+1)} = \\ &= \frac{2(n^2 + 2n + 1 - n^2 - 2n)}{(n+2)(n+1)} = \frac{2}{(n+2)(n+1)} > 0 \text{ для } \forall n \in \mathbb{N}, \end{aligned}$$

значит $a_{n+1} > a_n$. По определению это значит, что последовательность a_n является возрастающей.

2. Определить вид последовательности $a_n = \frac{n+1}{n^2+1}$.

Выясним, чему равно $a_{n+1} = \frac{(n+1)+1}{(n+1)^2+1} = \frac{n+2}{n^2+2n+2}$.

Теперь рассмотрим, чему равна разность.

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= \frac{n+2}{n^2+2n+2} - \frac{n+1}{n^2+1} = \\ &= \frac{(n+2)(n^2+1) - (n+1)(n^2+2n+2)}{(n^2+2n+2)(n^2+1)} = \\ &= \frac{n^3+2n^2+n+2-n^3-3n^2-4n-2}{(n^2+2n+2)(n^2+1)} = \frac{-n^2-3n}{(n^2+2n+2)(n^2+1)} = \\ &= \frac{-n(n+3)}{(n^2+2n+2)(n^2+1)} < 0; \quad -n(n+3) < 0 \text{ для } \forall n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Значит, $a_{n+1} < a_n$, т.е. последовательность для $\forall n \in \mathbb{N}$ является убывающей.

Рассмотрим какие общие свойства у последовательностей 2, 4, 6, 9, 10 (см. стр. 93).

Ответ: все члены этих последовательностей принадлежат интервалу $(-1; 1)$, т.е. для $\forall n \quad -1 < a_n < 1$.

Дадим теперь соответствующие определения.

Определение 3. Последовательность a_n называется *ограниченной сверху*, если существует число M такое, что все члены последовательности меньше или равны числу M , т.е. для $\forall n \in \mathbb{N}$ $a_n \leq M$.

Определение 4. Последовательность a_n называется *ограниченной снизу*, если существует число K такое, что все члены последовательности больше или равны числу K , т.е. для $\forall n \in \mathbb{N}$ $a_n \geq K$.

Определение 5. Последовательность называется *ограниченной*, если она ограничена сверху и снизу, т.е. для $\forall n \in \mathbb{N}$ $a_n \in [K; M]$.

3. Выясните монотонность и ограничена или нет

последовательность $a_n = \frac{2n^2+1}{n^2+3}$.

Выпишем первые несколько членов, чтобы, может быть, понять характер поведения последовательности:

$$a_1 = \frac{2+1}{1+3} = \frac{3}{4}; \quad a_2 = \frac{2 \cdot 2^2 + 1}{2^2 + 3} = \frac{9}{7}; \quad a_3 = \frac{2 \cdot 3^2 + 1}{3^2 + 3} = \frac{19}{12};$$

$$a_4 = \frac{2 \cdot 4^2 + 1}{4^2 + 3} = \frac{33}{19}; \quad a_5 = \frac{2 \cdot 5^2 + 1}{5^2 + 3} = \frac{51}{28}.$$

Похоже, она возрастающая. Проверим это.

$$a_{n+1} = \frac{2(n+1)^2 + 1}{(n+1)^2 + 3} = \frac{2n^2 + 4n + 3}{n^2 + 2n + 4}$$

$$a_{n+1} - a_n = \frac{2n^2 + 4n + 3}{n^2 + 2n + 4} - \frac{2n^2 + 1}{n^2 + 3} =$$

$$= \frac{(n^2+3)(2n^2+4n+3) - (2n^2+1)(n^2+2n+4)}{(n^2+3)(n^2+2n+4)} =$$

$$= \frac{2n^4 + 4n^3 + 9n^2 + 12n + 9 - 2n^4 - 4n^3 - 5n^2 - 2n - 4}{(n^2+3)(n^2+2n+4)} =$$

$$= \frac{4n^2 + 10n + 5}{(n^2+3)(n^2+2n+4)} > 0 \quad \text{для } \forall n \in \mathbb{N}.$$

Первое, что бросается в глаза, — это то, что

$$a_n = \frac{2n^2 + 1}{n^2 + 3} > 0, \text{ т.е. } a_n \text{ ограничена снизу; с другой}$$

стороны, очевидно, что $a_n < 2$, т.е. ограничена сверху.

Проверим предположение, что $a_n < 2$,

$$\text{т.е. } \frac{2n^2 + 1}{n^2 + 3} - 2 = \frac{2n^2 + 1 - 2n^2 - 6}{n^2 + 3} = \frac{-5}{n^2 + 3} < 0 \text{ для } \forall n \in \mathbb{N},$$

т.е. для $\forall n \in \mathbb{N}$ $a_n < 2$. Мы доказали ограничение сверху. Итак, для $\forall n \in \mathbb{N}$ $a_n \in (0; 2)$, что и требовалось доказать.

4. Выясните, ограничена ли последовательность

$$a_n = \frac{2n+1}{n^2+3}; a_1 = \frac{3}{4}; a_2 = \frac{5}{7}; a_3 = \frac{7}{12}; a_4 = \frac{9}{19}.$$

Похоже, a_n — убывающая. Проверим это.

$$a_{n+1} = \frac{2(n+1)+1}{(n+1)^2+3} = \frac{2n+3}{n^2+2n+4}$$

Рассмотрим

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= \frac{2n+3}{n^2+2n+4} - \frac{2n+1}{n^2+3} = \\ &= \frac{(2n+3)(n^2+3) - (2n+1)(n^2+2n+4)}{(n^2+3)(n^2+2n+4)} = \\ &= \frac{2n^3 + 3n^2 + 6n + 9 - 2n^3 - 5n^2 - 10n - 4}{(n^2+3)(n^2+2n+4)} = \\ &= \frac{-2n^2 - 4n + 5}{(n^2+3)(n^2+2n+4)} < 0 \end{aligned}$$

$$(-2n^2 - 4n + 5 = -2(n+1)^2 + 7 < 0 \text{ для } \forall n \in \mathbb{N}).$$

Значит $a_{n+1} < a_n$ для $\forall n \in \mathbb{N}$. Следовательно, a_n —

убывающая, но, очевидно, $a_n = \frac{2n+1}{n^2+3} > 0$.

С другой стороны, очевидно, раз a_n — убывающая, то

$$a_n < a_1 = \frac{3}{4}. \text{ Значит для } \forall n \in \mathbb{N} \ a_n \in \left(0; \frac{3}{4}\right],$$

т.е. a_n — ограниченная.

Способы задания функции

1. **Аналитический способ** задания, т.е. в виде формулы.

Например:

$$1) f(x) = 3x^3 - 4x.$$

$$2) f(x) = \sqrt{x^2 - 2x - \sin x}.$$

$$3) f(x) = 2^{\cos \log_2(3x-1)} \text{ и т.д.}$$

2. **Табличный способ.** Он применяется при исследованиях зависимости каких-то параметров от температуры, давления, массы и т.д. в неизвестных еще явлениях или процессах. Приходится экспериментально выявлять эти закономерности. Для этого составляются таблицы данного эксперимента. Например, зависимость линейных размеров неизвестного сплава от температуры нагрева, если при $t^0 = 0$ длину бруска принимаем за единицу.

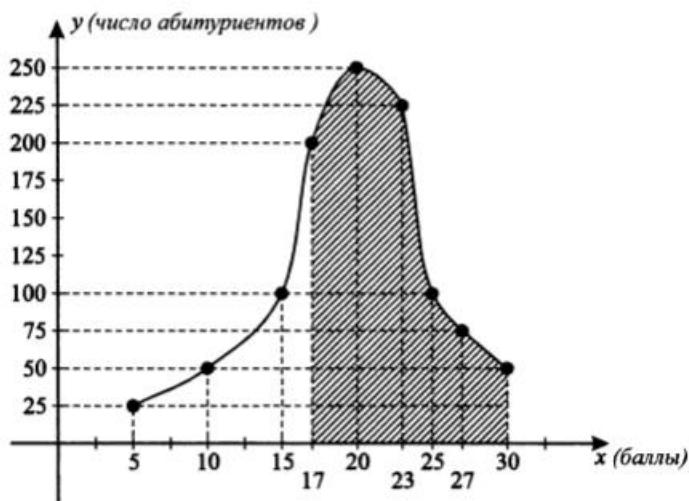
Пример 1.

№ эксперимента	1	2	3	4	5	6	7	8
Значения температуры $t, ^\circ\text{C}$	2	5	8	11	14	17	20	23
Изменение длины бруска данного сплава $L, \%$	0,1	0,4	0,5	0,7	0,7	1,1	1,5	2

3. **Графический способ.** Он очень удобен для представления результатов экспериментов в виде графиков и диаграмм. (Это очень наглядно.)

Пример 2.

Вступительные экзамены сдавали 3000 абитуриентов. Допустим, что максимально возможное число набранных баллов – 30. Поступило 1800 человек. Интересно, как распределилось число абитуриентов в зависимости от количества набранных ими баллов?



Из графика видно, что наибольшее количество поступивших набрало 20 баллов, и только немногие – 30 (проходной балл 17 баллов), значительная часть – больше 17 баллов и очень мало – 5–10 баллов и т. д.

Для данной задачи можно составить и диаграммы по набранным баллам, по предметам, по возрасту, полу и т. д.

4. Рассмотрим ряд чисел 3; 7; 13; 19; 29 ... и т. д. Попытка записать закон аналитически в виде формулы обречена на провал. Но при внимательном рассмотрении ряда чисел можно догадаться, что даны простые числа через одно. Это – **словесный или описательный** способ задания функции.
5. Рассмотрим еще один способ задания последовательности – **рекуррентный** (по-итальянски – «возвращаясь назад»).

Пример 3.

Пусть $\left. \begin{array}{l} a_1 = 1 \\ a_2 = 3 \end{array} \right\}$ называются начальными условиями,

$a_{n+2} = 2a_n + a_{n+1}$ – рекуррентное соотношение.

Найдите первые десять членов последовательности.

$$a_3 = 2a_1 + a_2 = 2 \cdot 1 + 3 = 5;$$

$$a_4 = 2a_2 + a_3 = 2 \cdot 3 + 5 = 11;$$

$$a_5 = 2a_3 + a_4 = 2 \cdot 5 + 11 = 21;$$

$$a_6 = 2a_4 + a_5 = 2 \cdot 11 + 21 = 43;$$

$$a_7 = 2a_5 + a_6 = 2 \cdot 21 + 43 = 85;$$

$$a_8 = 2a_6 + a_7 = 2 \cdot 43 + 85 = 171;$$

$$a_9 = 2a_7 + a_8 = 2 \cdot 85 + 171 = 341;$$

$$a_{10} = 2a_8 + a_9 = 2 \cdot 171 + 341 = 683 \text{ и т. д.}$$

Очевидно, чтобы вычислить a_{10} , необходимо знать все предыдущие члены последовательности, что в ряде случаев неудобно. Зато характер взаимоотношений с рядом стоящими членами – понятен. Впервые исследования последовательностей, заданных таким образом, провел итальянский математик Леонардо из Пизано (Фибоначчи) (1180–1240).

Продолжение классификации последовательностей

Рассмотрим последовательности:

$$1. \frac{1}{3}; -\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; -\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \dots$$

$$2. -1; +\frac{1}{2}; -\frac{1}{3}; \frac{1}{4}; -\frac{1}{5}; \dots$$

$$3. 2; -4; 6; -8; 10; \dots$$

$$4. 1; 54; 7; 6; 9; 8 \dots$$

Ясно, что те виды классификации, которые мы уже определили, не подходят. Хотя, конечно, их можно назвать колеблющимися. Попробуем подойти к определению такого вида последовательностей иначе.

Определение 6. Последовательность, все члены которой равны между собой, называется **постоянной**,

т.е. $x_n = x_{n+1}$ для $\forall n \in \mathbb{N}$.

Определение 7. Если последовательность не является возрастающей в строгом и широком смысле; убывающей в строгом и широком смысле; постоянной, то она называется **колеблющейся**.

Тренировочная работа 10

Выясните и докажите, что последовательность x_n возрастающая или убывающая, ограниченная или нет.

$$1. x_n = \frac{2n+3}{4-3n}.$$

$$2. x_n = \frac{n^2}{n^2+3}.$$

$$3. x_n = \frac{n^2+3}{2n+5}.$$

$$4. x_n = \frac{2n-1}{n^2-n+1}.$$

Решение тренировочной работы 10

1. Последовательность $x_n = \frac{2n+3}{4-3n}$.

$$1) \quad x_{n+1} = \frac{2(n+1)+3}{4-3(n+1)} = \frac{2n+5}{1-3n};$$

$$\begin{aligned} x_{n+1} - x_n &= \frac{2n+5}{1-3n} - \frac{2n+3}{4-3n} = \\ &= \frac{(2n+5)(4-3n) - (2n+3)(1-3n)}{(1-3n)(4-3n)} = \\ &= \frac{8n + 20 - 6n^2 - 15n - 2n - 3 + 6n^2 + 9n}{(1-3n)(4-3n)} = \\ &= \frac{17}{(1-3n)(4-3n)} = \frac{17}{(3n-1)(3n-4)} > 0. \end{aligned}$$

Тогда $x_{n+1} > x_n$, значит x_n — возрастающая последовательность для $n > 1$.

2) Вычислим первые члены последовательности.

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{2 \cdot 1 + 3}{4 - 3 \cdot 1} = 5; \\ x_2 &= \frac{2 \cdot 2 + 3}{4 - 3 \cdot 2} = \frac{7}{-2} = -3,5; \\ x_3 &= \frac{2 \cdot 3 + 3}{4 - 3 \cdot 3} = \frac{9}{-5} = -1,8; \\ x_4 &= \frac{2 \cdot 4 + 3}{4 - 3 \cdot 4} = \frac{11}{-8} = -1,375; \\ x_5 &= \frac{2 \cdot 5 + 3}{4 - 3 \cdot 5} = \frac{13}{-11} = -1 \frac{2}{11}; \\ x_6 &= \frac{2 \cdot 6 + 3}{4 - 3 \cdot 6} = \frac{15}{-14} = -1 \frac{1}{14} \text{ и т. д.} \end{aligned}$$

Для $\forall n > 1$, где $n \in \mathbb{N}$, x_n — возрастающая, поэтому $x_n \geq x_2$, т.е. $x_n \geq -3,5$, т.е. ограничена снизу.

Очевидно, что $x_n = \frac{2n+3}{4-3n} < 0$ для $\forall n \geq 2$, тогда $x_n \leq 5$

Докажем это. Рассмотрим

$$\begin{aligned} x_n - 5 &= \frac{2n+3}{4-3n} - 5 = \frac{2n+3-20+15n}{4-3n} = \\ &= \frac{17n-17}{4-3n} = -\frac{17(n-1)}{3n-4} \leq 0 \text{ для } \forall n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Значит, мы доказали, что $x_n \in [-3,5; 5]$ для $\forall n \in \mathbb{N}$,

т.е. последовательность $x_n = \frac{2n+3}{4-3n}$ ограничена.

Ответ: последовательность x_n ограничена для $\forall n \in \mathbb{N}$;

x_n – общего вида в смысле возрастания или убывания;

$\forall n > 1 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad x_n$ – возрастающая.

$$2. x_n = \frac{n^2}{n^2 + 3}.$$

$$1) x_{n+1} = \frac{(n+1)^2}{(n+1)^2 + 3} = \frac{n^2 + 2n + 1}{n^2 + 2n + 4};$$

$$\begin{aligned} x_{n+1} - x_n &= \frac{n^2 + 2n + 1}{n^2 + 2n + 4} - \frac{n^2}{n^2 + 3} = \\ &= \frac{(n^2 + 2n + 1)(n^2 + 3) - n^2(n^2 + 2n + 4)}{(n^2 + 3)(n^2 + 2n + 4)} = \\ &= \frac{n^4 + 2n^3 + n^2 + 3n^2 + 6n + 3 - n^4 - 2n^3 - 4n^2}{(n^2 + 3)(n^2 + 2n + 4)} = \end{aligned}$$

$$\frac{6n+3}{(n^2+3)(n^2+2n+4)} > 0,$$

т.е. $\forall n \in \mathbb{N} \quad x_{n+1} > x_n$, значит x_n – возрастающая.

2) Вычислим значения первых членов последовательности.

$$x_1 = \frac{1}{4}; \quad x_2 = \frac{4}{7}; \quad x_3 = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}; \quad x_4 = \frac{16}{19}; \quad x_5 = \frac{25}{28}.$$

Тогда, так как x_n – возрастающая, то $x_n \geq x_1 = \frac{1}{4}$,

тогда для $\forall n \in \mathbb{N} \quad x_n \geq x_1 = \frac{1}{4}$, т.е. ограничена снизу.

Характер изменения последовательности наталкивает на предположение об ограниченности сверху.

Предположим, что $x_n < 1$, и попробуем это доказать.

Рассмотрим

$$x_n - 1 = \frac{n^2}{n^2 + 3} - 1 = \frac{n^2 - n^2 - 3}{n^2 + 3} = -\frac{3}{n^2 + 3} < 0.$$

Итак, для $\forall n \in \mathbb{N}$ $x_n \in \left[\frac{1}{4}; 1\right)$.

Ответ: последовательность $x_n = \frac{n^2}{n^2 + 3}$ возрастающая и ограниченная.

3. $x_n = \frac{n^2 + 3}{2n + 5}$.

$$1) x_{n+1} = \frac{(n+1)^2 + 3}{2(n+1) + 5} = \frac{n^2 + 2n + 4}{2n + 7};$$

$$\begin{aligned} x_{n+1} - x_n &= \frac{n^2 + 2n + 4}{2n + 7} - \frac{n^2 + 3}{2n + 5} = \\ &= \frac{(n^2 + 2n + 4)(2n + 5) - (n^2 + 3)(2n + 7)}{(2n + 7)(2n + 5)} = \\ &= \frac{2n^3 + 9n^2 + 18n + 20 - 2n^3 - 7n^2 - 6n - 21}{(2n + 5)(2n + 7)} = \\ &= \frac{2n^2 + 12n - 1}{(2n + 5)(2n + 7)} > 0, \end{aligned}$$

для $\forall n \in \mathbb{N}$ $x_{n+1} > x_n$, значит x_n – возрастающая.

2) Для $x_n = \frac{n^2 + 3}{2n + 5}$ степень числителя выше степени знаменателя. Выделим целую часть методом деления уголком.

$$\text{Тогда } x_n = \frac{1}{2}n - 1,25 + \frac{9,25}{2n + 5}.$$

При $(n \rightarrow \infty) \Rightarrow \left(\frac{9,25}{2n + 5} \rightarrow 0\right)$, и так как

$y_n = \frac{1}{2}n - 1,25$ – возрастающая и неограниченная сверху последовательность, тогда и

$x_n = \frac{1}{2}n - 1,25 + \frac{9,25}{2n + 5}$ неограничена сверху.

Но так как $x_n > 0$, то x_n ограничена снизу.

Ответ: последовательность $x_n = \frac{n^2 + 3}{2n + 5}$ возрастающая, неограниченная сверху и ограничена снизу.

$$4. x_n = \frac{2n-1}{n^2-n+1}.$$

$$1) x_{n+1} = \frac{2(n+1)-1}{(n+1)^2-(n+1)+1} = \frac{2n+1}{n^2+n+1};$$

$$x_n = \frac{2n+1}{n^2+n+1};$$

$$\begin{aligned} x_{n+1} - x_n &= \frac{2n+1}{n^2+n+1} - \frac{2n-1}{n^2-n+1} = \\ &= \frac{(2n+1)(n^2-n+1) - (2n-1)(n^2+n+1)}{(n^2+n+1)(n^2-n+1)} = \\ &= \frac{2n^3+n-n^2+1-2n^3-n^2-n+1}{n^4+n^2+1} = \frac{-2(n^2-1)}{n^4+n^2+1} \leq 0, \end{aligned}$$

тогда $x_{n+1} \leq x_n$, значит x_n — убывающая в широком смысле.

2) Вычислим первые значения последовательности

$$x_n = \frac{2n-1}{n^2-n+1};$$

$$x_1 = 1; x_2 = \frac{3}{3} = 1; x_3 = \frac{5}{7}; x_4 = \frac{7}{13}; x_5 = \frac{9}{21}.$$

Так как x_n — убывающая в широком смысле, то $x_n \leq x_1$, т.е. x_n — ограниченная сверху.

Но так как $2n-1 > 0$ для $\forall n \in \mathbb{N}$ и $n^2-n+1 > 0$

также при $\forall n \in \mathbb{N}$, то $x_n = \frac{2n-1}{n^2-n+1} > 0$.

Итак, мы установили, что для $\forall n \in \mathbb{N}$ $x_n \in (0; 1]$.

Ответ: последовательность $x_n = \frac{2n-1}{n^2-n+1}$ убывающая и ограниченная.

Предел последовательности

Практикум 14 (введение)

1. Дано: $x_n = \frac{4n+1}{2n+3}$.

Выясним, начиная с какого номера члена последовательности $|x_n - 2| < 0,1$.

$$\text{Так как } x_n - 2 = \frac{4n+1}{2n+3} - 2 = \frac{4n+1-4n-6}{2n+3} = \frac{-5}{2n+3},$$

$$\text{то } |x_n - 2| = \left| \frac{-5}{2n+3} \right| = \frac{5}{2n+3} < 0,1.$$

$$\text{Решая неравенство, имеем } \frac{5}{0,1} < 2n + 3,$$

$$\text{т.е. } 2n > \frac{5}{0,1} - 3.$$

$$\text{Тогда } n > \frac{4,7}{0,2} = 23,5,$$

$$\text{т.е. для } \forall n > 23 \Rightarrow |x_n - 2| < 0,1,$$

$$\text{т.е. } 2 - 0,1 < x_n < 2 + 0,1$$

(так как $|\alpha| < \beta \Leftrightarrow -\beta < \alpha < \beta$).

Попробуем графически иллюстрировать эту задачу. Для этого вначале выясним монотонность этой последовательности (возрастание или убывание).

$$x_{n+1} = \frac{4(n+1)+1}{2(n+1)+3} = \frac{4n+5}{2n+5};$$

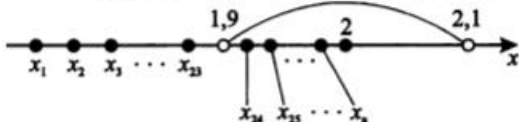
$$\begin{aligned} x_{n+1} - x_n &= \frac{4n+5}{2n+5} - \frac{4n+1}{2n+3} = \\ &= \frac{(2n+3)(4n+5) - (2n+5)(4n+1)}{(2n+5)(2n+3)} = \\ &= \frac{8n^2 + 22n + 15 - 8n^2 - 22n - 5}{(2n+5)(2n+3)} = \frac{10}{(2n+5)(2n+3)} > 0, \end{aligned}$$

т.е. для $\forall n \in \mathbb{N}$ $x_{n+1} > x_n$, значит x_n — возрастающая.

Здесь $x_1 = 1$; $x_5 = \frac{9}{7}$; ... ;

$$x_{23} = \frac{4 \cdot 23 + 1}{2 \cdot 23 + 3} = \frac{93}{49} = 1 \frac{44}{49}; \quad \left| 1 \frac{44}{49} - 2 \right| = \frac{5}{49} > 0,1;$$

$$x_{24} = \frac{4 \cdot 24 + 1}{2 \cdot 24 + 3} = \frac{97}{51} = 1 \frac{46}{51}; \quad \left| 1 \frac{46}{51} - 2 \right| = \frac{5}{51} < 0,1.$$



Интересно, что: $x_{23} \notin (1,9; 2,1)$; $x_{24} \in (1,9; 2,1)$,
т.е. для $\forall n > 23$ $x_n \in (1,9; 2,1)$.

2. Дано: $x_n = \frac{3n+2}{4n+1}$.

1) Выяснить, начиная с какого номера все члены последовательности $\left| x_n - \frac{3}{4} \right| < 0,01$.

$$x_n - \frac{3}{4} = \frac{3n+2}{4n+1} - \frac{3}{4} = \frac{12n+8-12n-3}{4(4n+1)} = \frac{5}{4(4n+1)}, \text{ тогда}$$

$$\left| \frac{5}{4(4n+1)} \right| < 0,01.$$

По свойству неравенств, содержащих модуль,

$$|\alpha| < \beta \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha < \beta \\ \alpha > -\beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{5}{4(4n+1)} < 0,01 \\ \frac{5}{4(4n+1)} > -0,01 \end{cases}$$

Нижнее неравенство в системе верно всегда для $\forall n \in \mathbb{N}$, так как положительное число больше отрицательного.

$$\text{Тогда } \frac{5}{4(4n+1)} < 0,01, \text{ так как } \begin{pmatrix} a > 0 \\ b > 0 \\ \frac{1}{a} > b \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a > 0 \\ b > 0 \\ \frac{1}{b} > a \end{pmatrix}.$$

$$\frac{5}{4 \cdot 0,01} < 4n + 1; \quad 4n > \frac{5}{0,04} - 1;$$

$$n > \frac{5-0,04}{0,16} = \frac{4,96}{0,16} = 31,$$

т.е. для $\forall n > 31$ $\left| x_n - \frac{3}{4} \right| < 0,01$.

Таким образом, $-0,01 < x_n - \frac{3}{4} < 0,01$,

тогда $\frac{3}{4} - 0,01 < x_n < \frac{3}{4} + 0,01$;

$x_n \in \left(\frac{3}{4} - 0,01; \frac{3}{4} + 0,01 \right)$, или $x_n \in (0,74; 0,76)$

для $\forall n > 31$.

Выясним, какой вид у этой последовательности в смысле монотонности (возрастания или убывания).

$$x_{n+1} = \frac{3(n+1)+2}{4(n+1)+1} = \frac{3n+5}{4n+5};$$

$$\begin{aligned} x_{n+1} - x_n &= \frac{3n+5}{4n+5} - \frac{3n+2}{4n+1} = \\ &= \frac{(3n+5)(4n+1) - (4n+5)(3n+2)}{(4n+5)(4n+1)} = \end{aligned}$$

$$= -\frac{5}{(4n+5)(4n+1)} < 0,$$

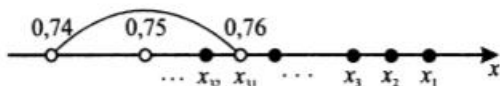
x_n – убывающая.

$$x_1 = 1; \dots;$$

$$x_{31} = \frac{3 \cdot 31 + 2}{4 \cdot 31 + 1} = \frac{95}{125} = \frac{19}{25};$$

$$\left| \frac{19}{25} - \frac{3}{4} \right| = \frac{1}{100} = 0,01; \text{ т.е. } x_{31} \text{ не меньше } 0,01.$$

$$x_{32} = \frac{3 \cdot 32 + 2}{4 \cdot 32 + 1} = \frac{98}{129}; \quad \left| \frac{98}{129} - \frac{3}{4} \right| = \left| \frac{392 - 387}{129 \cdot 4} \right| = \frac{5}{516} < 0,01.$$



- 2) Продолжим исследование этого вопроса. Выясним, начиная с какого номера $\left| x_n - \frac{3}{4} \right| < 0,001$, т.е. когда $\left(x_n - \frac{3}{4} = \frac{5}{4(4n+1)} \right)$

$$\begin{cases} \frac{5}{4(4n+1)} < 0,001 \\ \frac{5}{4(4n+1)} > -0,001 \end{cases} \text{ — это верно для } \forall n \in \mathbb{N}.$$

Таким образом, $\frac{5}{4 \cdot 0,001} < 4n + 1$;

$$n > \frac{5-0,004}{0,016} = \frac{4,996}{0,016} = \frac{4996}{16} = 312,25,$$

т.е. для $\forall n > 312 \Rightarrow \left| x_n - \frac{3}{4} \right| < 0,001$, т.е. $x_n \in (0,749; 0,751)$.

- 3) Интересно, что этот процесс приближения к $\frac{3}{4}$ можно продолжить. Попробуем осмыслить и обобщить.

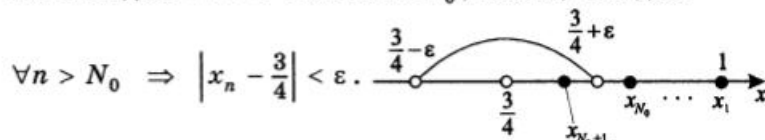
Выясним, начиная с какого номера члена последовательности $\left| x_n - \frac{3}{4} \right| < \varepsilon$, где ε (эпсилон, буква греческого алфавита) обозначает положительную, сколь угодно малую величину.

Тогда $\left| \frac{5}{4(4n+1)} \right| < \varepsilon$, т.е. $\begin{cases} \frac{5}{4(4n+1)} < \varepsilon \\ \frac{5}{4(4n+1)} > -\varepsilon \end{cases}$ — это верно $\forall n \in \mathbb{N}$;

$$\frac{5}{4(4n+1)} < \varepsilon \Rightarrow \frac{5}{4\varepsilon} < 4n + 1; \quad 4n > \frac{5}{4\varepsilon} - 1; \quad n > \frac{5-4\varepsilon}{16\varepsilon}.$$

Тогда $N_0 = \left[\frac{5-4\varepsilon}{16\varepsilon} \right]$ (функция целой части),

так как для $\forall \varepsilon > 0$ нашелся N_0 , такой, что для



В этом случае говорят, что число 0,75 является пределом числовой последовательности x_n и записывается это так:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{3}{4}, \text{ или } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n+2}{4n+1} = \frac{3}{4}.$$

Определение. Число a называется **пределом числовой последовательности** x_n , если для любого положительного ε найдется или существует такой номер члена числовой последовательности N_0 (как функция от ε), что для любых n , больших этого номера N_0 , справедлива принадлежность n -го члена последовательности x_n интервалу $(a - \varepsilon_0; a + \varepsilon_0)$. Записывается это так:

$$\forall \varepsilon > 0; \exists N_0 \mid \forall n > N_0 \Rightarrow \mid x_n - a \mid < \varepsilon,$$

$$\text{или } \forall \varepsilon > 0 \exists N_0 \mid \forall n > N_0 \Rightarrow x_n \in (a - \varepsilon; a + \varepsilon).$$

Вопрос.

Почему строгое определение предела последовательности было сформулировано только в середине XIX века немецким математиком Карлом Теодором Вильгельмом Вейерштрассом (1815–1897), хотя еще во времена Архимеда (287–212 до н.э.) были известны методы вычисления, использующие, хотя интуитивно, идеи предельного перехода?

Ответ.

До середины XIX века в математике использовались только так называемые назывные определения, например, равнобедренным треугольником называется треугольник, две стороны которого равны между собой, где перечисляются некоторые свойства объекта и ему присваивается какое-то имя-определение. Для того, чтобы дать определение предела числовой последовательности x_n , необходимо описание некоего **процесса** изменения. И если данную последовательность можно охарактеризовать этим **процессом** изменения, то говорят, что x_n имеет предел, если нет – последовательность x_n предела не имеет.

Вопрос.

Что значит доказать, что последовательность x_n имеет предел?

Ответ.

Это значит установить функциональную зависимость номера

N_0 от ε , например как в предыдущем случае, где $N_0 = \left[\frac{5-4\varepsilon}{16\varepsilon} \right]$.

Действительно, для $\forall \varepsilon > 0$ можно найти соответствующий номер, начиная с которого все члены последовательности $x_n \in (a - \varepsilon; a + \varepsilon)$ (эпсилон окрестности числа a).

Рассмотрим несколько значений.

$$1. \varepsilon = 0,02, \text{ тогда } N_0 = \left[\frac{5-0,08}{16 \cdot 0,02} \right] = \left[\frac{4,92}{0,32} \right] = [15,3] = 15,$$

$$\text{т.е. для } \forall n > 15 \Rightarrow x_n \in (0,73; 0,77).$$

$$2. \varepsilon = 0,003; N_0 = \left[\frac{5-0,012}{16 \cdot 0,003} \right] = \left[\frac{4,988}{0,048} \right] = [103,9] = 103,$$

$$\text{т.е. для } \forall n > 103 \Rightarrow x_n \in (0,747; 0,753).$$

Тренировочная работа 11

Дано: $x_n = \frac{5n+3}{4n-1}$. Выяснить:

1. Монотонность;
2. Ограниченность;
3. Начиная с какого номера все члены последовательности

x_n таковы, что справедливо неравенство $\left| x_n - \frac{5}{4} \right| < 0,01$;

4. Доказать, что $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{5}{4}$.

Решение тренировочной работы 11

Дано: $x_n = \frac{5n+3}{4n-1}$.

$$1. x_{n+1} = \frac{5(n+1)+3}{4(n+1)-1} = \frac{5n+8}{4n+3};$$

$$\begin{aligned} x_{n+1} - x_n &= \frac{5n+8}{4n+3} - \frac{5n+3}{4n-1} = \\ &= \frac{(5n+8)(4n-1) - (5n+3)(4n+3)}{(4n+3)(4n-1)} = \\ &= \frac{20n^2 + 27n - 8 - 20n^2 - 27n - 9}{(4n+3)(4n-1)} = \\ &= \frac{-15}{(4n+3)(4n-1)} < 0 \end{aligned}$$

Таким образом, $x_{n+1} < x_n$, т.е. x_n — убывающая.

2. Вычислим $x_1 = \frac{8}{3}$, тогда $x_n \leq \frac{8}{3}$, т.е. ограничена сверху.

С другой стороны, очевидно, что $x_n > 0$, так как

$$\frac{5n+3}{4n-1} > 0 \text{ для } \forall n \in \mathbb{N}. \text{ Тогда для } \forall n \in \mathbb{N} \ x_n \in \left(0; 2\frac{2}{3}\right].$$

3. $\left| x_n - \frac{5}{4} \right| < 0,01$, т.е. $\begin{cases} x_n - \frac{5}{4} < 0,01 \\ x_n - \frac{5}{4} > -0,01 \end{cases}$. Рассмотрим

$$x_n - \frac{5}{4} = \frac{5n+3}{4n-1} - \frac{5}{4} = \frac{20n+12-20n+5}{4(4n-1)} = \frac{17}{4(4n-1)};$$

$$\left| x_n - \frac{5}{4} \right| = \frac{17}{4(4n-1)}, \text{ т. е. } \frac{17}{4(4n-1)} < 0,01; \quad \frac{17}{4 \cdot 0,01} < 4n - 1;$$

$$4n > \frac{17}{0,04} + 1, \text{ тогда } n > \frac{17+0,04}{0,16} = \frac{17,04}{0,16} = 106,5,$$

$$\text{т. е. } [106,5] = 106. \text{ Значит } \forall n > 106 \Rightarrow \left| x_n - \frac{5}{4} \right| < 0,01.$$

4. Доказать, что $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1,25$.

$$|x_n - 1,25| < \varepsilon \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{17}{4(4n-1)} < \varepsilon \\ \frac{17}{4(4n-1)} > -\varepsilon \end{cases} \text{ — верно для } \forall n \in \mathbb{N},$$

$$\text{т. е. } \frac{17}{4(4n-1)} < \varepsilon; \quad \frac{17}{4\varepsilon} < 4n - 1; \quad 4n > \frac{17+4\varepsilon}{4\varepsilon}; \quad n > \frac{17+4\varepsilon}{16\varepsilon}.$$

$$\text{Тогда } N_0 = \left[\frac{17+4\varepsilon}{16\varepsilon} \right],$$

$$\text{т. е. для } \forall \varepsilon > 0 \exists N_0 \left(N_0 = \left[\frac{17+4\varepsilon}{16\varepsilon} \right] \right) | \forall n > N_0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |x_n - 1,25| < \varepsilon. \text{ Значит } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1,25,$$

что и требовалось доказать.

Проверочная работа 4

Дано: $x_n = \frac{2n+3}{3n+4}$. Выяснить:

1. Монотонность.
2. Ограниченность.
3. Начиная с какого номера все члены последовательности x_n таковы, что справедливо неравенство

$$\left| x_n - \frac{2}{3} \right| < 0,001.$$

4. Доказать, что $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{2}{3}$.

Историческая справка

Функция – одно из основных общенаучных понятий; оно выражает взаимосвязь между различными объектами. Первые попытки описать это понятие принадлежат немецкому ученому *Готфриду Вильгельму Лейбницу* (1646–1716) – физика, математику, философу.

Под функцией понималось «выражение, составленное каким-то образом из переменной величины и постоянных величин».

Леонард Эйлер (1707–1783) – математик, механик, физик и астроном, по происхождению швейцарец; работал в России и Германии. Под функцией Эйлер понимал аналитическое выражение, но готов был понимать под функцией то, что можно «вычертить карандашом на листе бумаги». Эйлер считал, что класс функций, являющихся «произвольно начерченными кривыми» шире класса функций, заданных аналитически.

Д'Аламбер Жан Лерон (1717–1783) – французский математик, механик и философ, возражал, считая, что тогда нет разницы.

Даниил Бернулли (1706–1782) – швейцарский ученый, пошел дальше, введя понятие многолистной функции.

Современное понятие функции принадлежит русскому математику *Николаю Ивановичу Лобачевскому* (1792–1856), известному более, как создатель неевклидовой геометрии.

Некоторые вопросы логики доказательства

Определение. Если из истинности утверждения A следует истинность утверждения B ,

[Записывают это так: из $(A - И) \Rightarrow (B - И)$]

то говорят, что истинность утверждения A достаточна для истинности утверждения B , а истинность утверждения B необходима для истинности утверждения A , или что $(A - И)$ есть признак $(B - И)$, а $(B - И)$ есть свойство $(A - И)$, т.е. истинность A есть признак истинности B , а истинность B есть свойство истинности A .

Пример. Утверждение A – ($ABCD$ – параллелограмм).

Утверждение B – (противоположные углы равны: $\angle B = \angle D$).

Сформулируем логическую цепочку из $(A - И) \Rightarrow (B - И)$.

Такая логическая цепочка истинности называется **теоремой**.

В данном случае, действительно, из того, что нам дан параллелограмм, следует, что два противоположных угла равны: $\angle B = \angle D$.

Таким образом можно утверждать, что факт (A) (четыреугольник есть параллелограмм) достаточен для того, чтобы в четырехугольнике два противоположных угла были равны, т.е. он являлся бы параллелограммом – факт (B).

Увы, логическая цепочка из $(B - И) \Rightarrow (A - И)$ ложная, так как равенство только двух противоположных углов недостаточно для того чтобы четырехугольник являлся параллелограммом.

В рамках обычных рассуждений (т.е. в рамках двузначной логики) из истинности утверждения A возможны только две логические цепочки: либо из $(A - И) \Rightarrow (B - И)$, либо из $(A - И) \Rightarrow (\neg B - И)$ (из истинности утверждения A следует истинность отрицания B), где \neg – символ отрицания. Например, какое-то число либо кратно двум, либо оно некратно двум.

Эту особенность можно использовать для доказательства.

Действительно если какую-то логическую цепочку, например, первую, из $(A - И) \Rightarrow (B - И)$ нельзя доказать напрямую, то предполагают истинной другую логическую цепочку, а именно вторую – из $(A - И) \Rightarrow (\neg B - И)$ (из истинности утверждения A следует истинность отрицания B).

Если проводя в дальнейшем логические рассуждения, мы приходим к противоречию типа $2 = 3$, то значит наше предположение о том, что данная логическая цепочка истинна – ложно. А это значит, что верна первая логическая цепочка, так как других больше нет.

Такой способ рассуждения иногда называется доказательством от противного или методом исключенного третьего. В ряде случаев такой способ доказательства является весьма эффективным, а иногда и единственным. В дальнейшем будет приведен пример доказательства теоремы методом от противного.

Основные теоремы о пределах

Теорема 1. Если последовательность имеет предел, то он единственный.

Факт *A* – наличие предела для x_n .

Факт *B* – что этот предел единственный.

Дано: $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \Rightarrow \exists \text{ед. число } a \mid \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$,

т.е. из $(A - И) \Rightarrow (B - И)$.

Доказательство проведем методом исключенного третьего, т.е. предположим, что из $(A - И) \Rightarrow (\neg B - И)$, значит, из существования предела последовательности следует его не единственность.

$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \Rightarrow \exists a \neq b \begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \\ \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = b \end{cases}$$

Для определенности пусть $a > b$:

1) так как $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, то по определению

$$\text{для } \forall \varepsilon > 0 \exists N_1 \mid \forall n > N_1 \Rightarrow a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon.$$

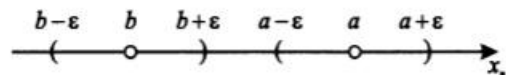
2) $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = b$, то по определению

$$\text{для } \forall \varepsilon > 0 \exists N_2 \mid \forall n > N_2 \Rightarrow b - \varepsilon < x_n < b + \varepsilon.$$

Выберем $N_3 \begin{cases} N_3 > N_1 \\ N_3 > N_2 \end{cases}$, тогда

$$\text{для } \forall \varepsilon > 0 \exists N_3 \mid \forall n > N_3 \Rightarrow \begin{cases} a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon \\ b - \varepsilon < x_n < b + \varepsilon \end{cases}$$

На картинке это выглядит так:



Тогда для $\forall \varepsilon > 0 \exists N_3 \mid \forall n > N_3 \Rightarrow a - \varepsilon < x_n < b + \varepsilon$.

Пусть $\varepsilon_0 = \frac{a-b}{2}$. Так как утверждение должно быть справедливо для $\forall \varepsilon$, то в том числе и для ε_0 , тогда

с учетом того, что

$$\left. \begin{aligned} b + \varepsilon_0 &= b + \frac{a-b}{2} = \frac{a+b}{2} \\ a - \varepsilon_0 &= a - \frac{a-b}{2} = \frac{a+b}{2} \end{aligned} \right\}$$

получается, что для $\varepsilon_0 = \frac{a-b}{2}$ $\exists N_3 \mid \forall n > N_3$ верно

$$\frac{a+b}{2} < x_n < \frac{a+b}{2}.$$

Но это ложное утверждение, т.е. противоречие.

Вывод. Полученное противоречие доказывает, что предположение о том, что из существования предела следует его неединственность ложно, а это значит, что из существования предела последовательности x_n следует его единственность.

Рассмотрим несколько иной способ доказательства этой части рассуждений:

1) так как $\lim_{x \rightarrow \infty} x_n = a$,

то для $\forall \varepsilon > 0 \exists N_1 \mid \forall n > N_1 \Rightarrow |x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$;

2) $\lim_{x \rightarrow \infty} x_n = b$, то для $\forall \varepsilon > 0 \exists N_2 \mid \forall n > N_2 \Rightarrow |x_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Пусть $N_3 \begin{cases} N_3 > N_1 \\ N_3 > N_2 \end{cases}$, тогда

для $\forall \varepsilon > 0 \exists N_3 \mid \forall n > N_3 \Rightarrow \begin{cases} |x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} \\ |x_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} \end{cases}$, тогда

$$|a - b| = |(a - x_n) + (x_n - b)| \leq |a - x_n| + |x_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Мы воспользовались известным неравенством, содержащим модуль; $|a + b| \leq |a| + |b|$, т.е. для $\forall \varepsilon > 0 \exists N_3 \mid \forall n > N_3 \Rightarrow |a - b| < \varepsilon$.

Это должно выполняться для $\forall \varepsilon > 0$, в том числе и для $\varepsilon_0 = \frac{a-b}{2}$ ($a > b$), тогда $|a - b| < \frac{a-b}{2}$, из чего следует

$1 < \frac{1}{2}$ — что ложь.

Полезно знать ряд теорем о пределах.

Теорема 2. Теорема о пределах в неравенствах.

$$\text{Пусть } \left. \begin{array}{l} \exists \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \\ \exists \lim_{n \rightarrow \infty} y_n \\ \forall n > N; x_n \geq y_n \end{array} \right| \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \geq \lim_{n \rightarrow \infty} y_n .$$

Примечание.

Можно сформулировать более общее утверждение.

$$\left. \begin{array}{l} \exists \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \\ \exists \lim_{n \rightarrow \infty} y_n \\ \forall n > N; x_n > y_n \end{array} \right| \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \geq \lim_{n \rightarrow \infty} y_n ,$$

т. е. переходя к пределу в строгих неравенствах, можем получить нестрогое неравенство.

Теорема 3. Любая последовательность, имеющая предел, ограничена.

Теорема 4. Теорема о сжатой переменной (иногда ее называют теоремой о двух городских).

Пусть

$$\left. \begin{array}{l} 1) x_n \leq y_n \leq z_n \text{ для } \forall n > N_1 \\ 2) \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \end{array} \right| \Rightarrow \exists \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = a .$$

Рассмотрим пример использования теоремы для вычисления пределов.

$$\text{Дано: } y_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = ?$$

Так как $n \cdot \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \leq y_n \leq n \cdot \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$, то

$$\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} - \text{наибольшая дробь суммы;}$$

$$\frac{1}{\sqrt{n^2+n}} - \text{наименьшая дробь суммы.}$$

Необходимо учесть, что

$$1) \sqrt{n^2 + n} < n + 1 \quad (n^2 + n < n^2 + 2n + 1; n + 1 > 0);$$

$$\text{тогда } \frac{1}{\sqrt{n^2 + n}} > \frac{1}{n + 1}, \text{ значит } \frac{n}{\sqrt{n^2 + n}} > \frac{n}{n + 1};$$

$$2) \sqrt{n^2 + 1} > n \quad (n^2 + 1 > n^2; 1 > 0),$$

$$\text{тогда } \frac{1}{\sqrt{n^2 + 1}} < \frac{1}{n}; \text{ значит } \frac{n}{\sqrt{n^2 + 1}} < \frac{n}{n} = 1.$$

$$\text{Тогда } \frac{n}{n + 1} < \frac{n}{\sqrt{n^2 + n}} \leq y_n \leq \frac{n}{\sqrt{n^2 + 1}} < 1, \text{ т.е. } \frac{n}{n + 1} < y_n < 1.$$

Переходя к пределу $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n + 1} \leq \lim y_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} 1$, можно

$$\text{доказать, что } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n + 1} = 1.$$

$$\text{Тогда } 1 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} y_n \leq 1, \text{ т.е. } \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 1.$$

Теорема 5 (Теорема Больцано – Коши – Вейерштрасса)¹.

Всякая монотонная, ограниченная последовательность имеет предел.

Примечание. Пусть $x_n = \frac{(-1)^n}{2n}$, так как $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n}{2n} = 0$,

то ясно, что условие ограниченности является необходимым условием, хотя и недостаточным. А вот условие монотонности и не необходимо, и недостаточно.

¹ Бернард Больцано (1781–1848) – чешский математик и философ, в начале XIX в. наряду с Коши дал определение предела, дифференциала и интеграла, а также предложил строгое математическое доказательство теоремы о непрерывной на отрезке функции; был предшественником Кантора в исследовании бесконечных множеств.

Луи Коши (1789–1857) – французский математик; автор классических курсов математического анализа, основанных на систематическом применении понятия предела; один из основоположников теории аналитических функций, автор трудов по теории дифференциальных уравнений, математической физике, теории чисел, геометрии.

Карл Вейерштрасс (1815–1897) – немецкий математик; автор трудов по математическому анализу, теории функции, вариационному исчислению, дифференциальной геометрии и линейной алгебре; разработал схему логического обоснования математического анализа.

Алгебраические операции над пределами

Выполним численные эксперименты.

$$\text{Пусть } a_n = \frac{2n}{n+1}; \quad b_n = \frac{n+1}{n}.$$

Составим таблицу значений последовательностей.

№	1	2	3	4	5	...	100	...	Наблюдения и выводы
a_n	1	1,333	1,5	1,60	1,67	...	1,98	...	$a_n \rightarrow 2$
b_n	2	2	1,667	1,5	1,4	...	1,02	...	$b_n \rightarrow 1$
$a_n + b_n$	3	3,333	3,167	3,1	3,067	...	3,001	...	$a_n + b_n \rightarrow 3$
$a_n \cdot b_n$	2	2,667	2,5	2,4	2,333	...	2,019	...	$a_n \cdot b_n \rightarrow 2$
$\frac{a_n}{b_n}$	0,333	0,667	0,9	1,067	1,19	...	1,941	...	$\frac{a_n}{b_n} \rightarrow 2$

Эти наблюдения позволяют сформулировать ряд теорем.

Теорема 6. Предел алгебраической суммы двух последовательностей, имеющих пределы, равен сумме пределов этих последовательностей.

$$\text{Пусть } \left. \begin{array}{l} \exists \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \\ \exists \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \lim_{n \rightarrow \infty} b_n}.$$

Приведем важный контрпример, объясняющий необходимость существования предела для каждой последовательности.

Пусть

$$a_n = n + \frac{n+1}{n}; \quad \text{тогда } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty \text{ (предела нет),}$$

$$b_n = \frac{4-n^2}{n}, \quad \text{тогда } \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = -\infty \text{ (предела нет),}$$

$$\text{но } a_n + b_n = \frac{n+5}{n}; \quad \text{тогда } \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = 1,$$

$$\text{значит } \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) \neq \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \lim_{n \rightarrow \infty} b_n.$$

Дело в том, что не существует предел для последовательностей a_n и b_n .

Теорема 7. Предел произведения двух последовательностей, имеющих пределы, равен произведению пределов этих последовательностей.

$$\text{Пусть } \left. \begin{array}{l} \exists \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \\ \exists \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} b_n}.$$

Теорема 8. Предел частного двух последовательностей, имеющих пределы, равен частному пределов этих последовательностей, если предел делителя не равен нулю.

$$\text{Пусть } \left. \begin{array}{l} \exists \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \\ \exists \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \neq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_n}{b_n} \right) = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n}}.$$

Следствия из теорем:

$$1. \lim_{n \rightarrow \infty} c = c.$$

$$2. \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda x_n = \lambda \lim_{n \rightarrow \infty} x_n, \text{ где } \lambda - \text{const (постоянная).}$$

$$3. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\underbrace{a_n + b_n + c_n + \dots + k_n}_{t \text{ слагаемых}} \right) = \underbrace{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \lim_{n \rightarrow \infty} b_n + \dots + \lim_{n \rightarrow \infty} k_n}_{\substack{t \text{ слагаемых} \\ (t - \text{фиксированное число})}}.$$

$$4. \lim_{n \rightarrow \infty} a_n^m = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \right)^m.$$

$$5. \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{x_n} = \sqrt{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n}.$$

Применение теорем о пределах к вычислению пределов

Практикум 15

1. Вычислите.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 - n + 2}{4n^2 + n - 3} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 \left(3 - \frac{1}{n} + \frac{2}{n^2} \right)}{n^2 \left(4 + \frac{1}{n} - \frac{3}{n^2} \right)} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 - \frac{1}{n} + \frac{2}{n^2}}{4 + \frac{1}{n} - \frac{3}{n^2}} =$$

$$= \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(3 - \frac{1}{n} + \frac{2}{n^2} \right)}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(4 + \frac{1}{n} - \frac{3}{n^2} \right)} =$$

$$= \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} 3 - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n^2}}{\lim_{n \rightarrow \infty} 4 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{n^2}} =$$

$$= \frac{3 - 0 + 0}{4 + 0 - 0} = \frac{3}{4} = 0,75.$$

Теорией о частном пока воспользоваться нельзя, так как имеем неопределенность типа $\frac{\infty}{\infty}$.

Вынесем n^2 в числителе и знаменателе.

Теперь теоремой 8 можно воспользоваться.

В данном случае можно воспользоваться теоремой о сумме.

Можно доказать, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$, тогда тем более $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} = 0$.

В дальнейшем столь полная детализация ни к чему.

2. Вычислите $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{n^2 + 1}}$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{n^2 + 1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n \sqrt{1 + \frac{1}{n^2}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n^2}}} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} 1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{1 + \frac{1}{n^2}}} =$$

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n^2}}} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} 1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{1 + \frac{1}{n^2}}} = \\
 &= \frac{1}{\sqrt{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)}} = \frac{1}{\sqrt{\lim_{n \rightarrow \infty} 1 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1+0}} = 1,
 \end{aligned}$$

так как $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{x_n} = \sqrt{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n}$.

3.

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2(\sqrt{n} - \sqrt{n-1})}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}$ Домножим на сопряженное выражение относительно числителя и знаменателя.

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{2(\sqrt{n} - \sqrt{n-1})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})} \cdot \frac{\sqrt{n} + \sqrt{n-1}}{\sqrt{n} + \sqrt{n-1}} \right] = \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2(n-n+1)(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{(n+1-n)(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})} = 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}{\sqrt{n} + \sqrt{n-1}} = \\
 &= 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n} \left(\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1 \right)}{\sqrt{n} \left(1 + \sqrt{1 - \frac{1}{n}} \right)} = \frac{2 \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1 \right)}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \sqrt{1 - \frac{1}{n}} \right)} = \\
 &= 2 \cdot \frac{\sqrt{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)} + 1}{1 + \sqrt{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n} \right)}} = 2 \cdot \frac{\sqrt{1+0} + 1}{1 + \sqrt{1-0}} = 2 \cdot \frac{1+1}{1+1} = 2.
 \end{aligned}$$

4. Вычислите $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$.

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1-n}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = 0.
 \end{aligned}$$

Тренировочная работа 12

Вычислите:

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 - n + 2}{\sqrt{2 \cdot n^2 + 3n - 5}}.$

2. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^3 - 1}{6n^3 + n + 2}.$

3. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(5 + \frac{(-1)^n}{2n+1} \right).$

4. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[3 + \left(\frac{2}{5} \right)^n \right].$

5. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+1} - \sqrt{n^2-n}}.$

6. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(n^2 - \sqrt{n^2 + 5n} \right).$

7. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt[3]{n^3 + 2n^2 + 1} - \sqrt[3]{n^3 + 3n^2 + 2} \right).$

8. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 10} + \dots \right).$

9. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^4 - (n-1)^4}{(n+1)^3 + (n-1)^3}.$

10. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{(n+3)^3} - \sqrt{n(n-1)(n-3)}}{\sqrt{n}}.$

11. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n-9n^2}}{3n - \sqrt[4]{9n^8+1}}.$

12. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt[4]{n} \left(\sqrt[4]{n^3+n} - \sqrt[4]{n^3+n^2} \right) \right).$

Решение тренировочной работы 12

Вычислите:

$$\begin{aligned}
 1. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 - n + 2}{\sqrt{2 \cdot n^2 + 3n - 5}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 \left(2 - \frac{1}{n} + \frac{2}{n^2}\right)}{n^2 \left(\sqrt{2 + \frac{3}{n} - \frac{5}{n^2}}\right)} = \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 - \frac{1}{n} + \frac{2}{n^2}}{\sqrt{2 + \frac{3}{n} - \frac{5}{n^2}}} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(2 - \frac{1}{n} + \frac{2}{n^2}\right)}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{2 + \frac{3}{n} - \frac{5}{n^2}}\right)} = \frac{2 - 0 + 0}{\sqrt{2 + 0 - 0}} = \sqrt{2}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^3 - 1}{6n^3 + n + 2} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 \left(3 - \frac{1}{n^3}\right)}{n^3 \left(6 + \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^3}\right)} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(3 - \frac{1}{n^3}\right)}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(6 + \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^3}\right)} = \\
 &= \frac{3 - 0}{6 + 0 + 0} = \frac{1}{2}.
 \end{aligned}$$

$$3. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(5 + \frac{(-1)^n}{2n+1}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} 5 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = 5 + 0 = 5.$$

$$4. \lim_{n \rightarrow \infty} \left[3 + \left(\frac{2}{5}\right)^n\right] = \lim_{n \rightarrow \infty} 3 + \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{5}\right)^n = 3 + 0 = 3.$$

$$\begin{aligned}
 5. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+1} - \sqrt{n^2-n}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2+1} + \sqrt{n^2-n}}{(n^2+1) - (n^2-n)} = \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2+1} + \sqrt{n^2-n}}{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \left(\sqrt{1 + \frac{1}{n^2}} + \sqrt{1 - \frac{1}{n}}\right)}{n \left(1 + \frac{1}{n}\right)} = \\
 &= \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{1 + \frac{1}{n^2}} + \sqrt{1 - \frac{1}{n}}\right)}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)} = \frac{\sqrt{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)} + \sqrt{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)}}{\lim_{n \rightarrow \infty} 1 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n}} = \\
 &= \frac{\sqrt{1+0} + \sqrt{1-0}}{1+0} = 2.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 6. \lim_{n \rightarrow \infty} (n^2 - \sqrt{n^2 + 5n}) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - n^2 - 5n}{n + \sqrt{n^2 + 5n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \cdot (-5)}{n \left(1 + \sqrt{1 + \frac{5}{n}}\right)} = \\
 &= \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} (-5)}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{5}{n}}\right)} = \frac{-5}{1 + \sqrt{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{5}{n}\right)}} = \frac{-5}{1 + \sqrt{1+0}} = -2,5.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 7. \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{n^3 + 2n^2 + 1} - \sqrt[3]{n^3 + 3n^2 + 2}) &= \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 + 2n^2 + 1 - n^3 - 3n^2 - 2}{\sqrt[3]{(n^3 + 2n^2 + 1)^2} + \sqrt[3]{(n^3 + 2n^2 + 1)(n^3 + 3n^2 + 2)} + \sqrt[3]{(n^3 + 3n^2 + 2)^2}} = \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-n^2 - 1}{n^2 \left(\sqrt[3]{\left(1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^3}\right)^2} + \sqrt[3]{\left(1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^3}\right)\left(1 + \frac{3}{n^2} + \frac{2}{n^3}\right)} + \sqrt[3]{\left(1 + \frac{3}{n^2} + \frac{2}{n^3}\right)^2} \right)} = \\
 &= -\frac{1}{\sqrt[3]{(1+0+0)} + \sqrt[3]{(1+0+0)(1+0+0)} + \sqrt[3]{(1+0+0)^2}} = -\frac{1}{3}.
 \end{aligned}$$

$$8. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 10} + \dots \right).$$

Необходимо написать n -й член последовательности.

Рассмотрим последовательность 1; 4; 7; 10 (явно арифметическая прогрессия),

$$\text{где } \begin{cases} a_1 = 1 \\ d = 3 \end{cases} \Rightarrow a_n = a_1 + (n-1)d,$$

$$\text{т.е. } a_n = 1 + (n-1)3 = 3n - 2,$$

$$\text{а } a_{n+1} = 3(n+1) - 2 = 3n + 1.$$

Итак, n -й член первоначальной последовательности

$$\text{равен } \frac{1}{(3n-2)(3n+1)}.$$

Представим тогда каждый член суммы в виде разности двух дробей и выполним почленно сложение в левой и правой части равенств.

Примечание. Вопросы, связанные с арифметической прогрессией, мы будем рассматривать более подробно несколько позже.

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 \cdot 4} &= \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{4} \right) \\ \frac{1}{4 \cdot 7} &= \frac{1}{3} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{7} \right) \\ + \frac{1}{7 \cdot 10} &= \frac{1}{3} \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{10} \right) \\ &\dots\dots\dots \\ \frac{1}{(3n-2)(3n+1)} &= \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3n-2} - \frac{1}{3n+1} \right) \\ \frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 10} + \dots + \frac{1}{(3n-2)(3n+1)} &= \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{3n+1} \right) \\ \left(\frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{3n+1} \right) \right) &= \frac{1}{3} \cdot \frac{3n+1-1}{3n+1} = \frac{n}{3n+1}. \end{aligned}$$

Сложив последовательно левые и правые части равенств, заметим, что каждый второй член разности взаимно уничтожится с последующим первым членом разности,

тогда $S_n = \frac{n}{3n+1}$.

Значит $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{3n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3 + \frac{1}{n}} = \frac{1}{3}$,

т.е. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 7} + \dots \right) = \frac{1}{3}$.

9. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^4 - (n-1)^4}{(n+1)^3 + (n-1)^3} =$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{((n+1)^2 - (n-1)^2)((n+1)^2 + (n-1)^2)}{(n+1+n-1)((n+1)^2 - (n+1)(n-1) + (n-1)^2)} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n \cdot 2(2n^2 + 2)}{2n(n^2 + 3)} = \lim_{n \rightarrow \infty} 2 \cdot 2 = 4.$$

10. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{(n+3)^3} - \sqrt{n(n-1)(n-3)}}{\sqrt{n}} =$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^3 - n(n-1)(n-3)}{\sqrt{n}(\sqrt{(n+3)^3} + \sqrt{n(n-1)(n-3)})} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cancel{n^3} + 3n^2 + 3n + 1 - \cancel{n^3} + 4n^2 - 3n}{\sqrt{n} \sqrt{n^3} \left(\sqrt{\left(1 + \frac{3}{n}\right)^3} + \sqrt{\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{3}{n}\right)} \right)} =$$

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 \left(7 + \frac{1}{n^2} \right)}{n^2 \left(\sqrt{\left(1 + \frac{3}{n} \right)^3} + \sqrt{\left(1 - \frac{1}{n} \right) \left(1 - \frac{3}{n} \right)} \right)} = \\
 &= \frac{7+0}{\sqrt{(1+0)^3} + \sqrt{(1-0)(1-0)}} = 3,5.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 11. \quad &\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n} - 9n^2}{3n - \sqrt[4]{9n^8} + 1} = \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 \left(\frac{1}{n^{5/3}} - 9 \right)}{n^2 \left(\frac{3}{n} - \sqrt[4]{9 + \frac{1}{n^8}} \right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n^{5/3}} - 9}{\frac{3}{n} - \sqrt[4]{9 + \frac{1}{n^8}}} = \\
 &= \frac{0-9}{0-\sqrt[4]{9+0}} = \frac{9}{\sqrt[4]{9}} = \frac{9}{\sqrt{3}} = 3\sqrt{3}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 12. \quad &\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt[4]{n} \left(\sqrt[4]{n^3 + n} - \sqrt[4]{n^3 + n^2} \right) \right) = \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[4]{n} \left(\sqrt{n^3 + n} - \sqrt{n^3 + n^2} \right)}{\sqrt[4]{n^3 + n} + \sqrt[4]{n^3 + n^2}} = \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[4]{n} (n^3 + n - (n^3 + n^2))}{\left(\sqrt[4]{n^3 + n} + \sqrt[4]{n^3 + n^2} \right) \left(\sqrt{n^3 + n} + \sqrt{n^3 + n^2} \right)} = \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[4]{n} (n - n^2)}{n^{3/4} \cdot \left(\sqrt[4]{1 + \frac{1}{n^2}} + \sqrt[4]{1 + \frac{1}{n}} \right) \cdot n^{3/2} \cdot \left(\sqrt{1 + \frac{1}{n^2}} + \sqrt{1 + \frac{1}{n}} \right)} = \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{2\frac{1}{4}} \left(\frac{1}{n} - 1 \right)}{n^{2\frac{1}{4}} \left(\sqrt[4]{1 + \frac{1}{n^2}} + \sqrt[4]{1 + \frac{1}{n}} \right) \left(\sqrt{1 + \frac{1}{n^2}} + \sqrt{1 + \frac{1}{n}} \right)} = \\
 &= \frac{0-1}{\left(\sqrt[4]{1+0} + \sqrt[4]{1+0} \right) \left(\sqrt{1+0} + \sqrt{1+0} \right)} = -\frac{1}{4}.
 \end{aligned}$$

Проверочная работа 5

Вычислите:

1.
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2+3n)(n^2+n+1)}{5n^3-3n^2+1}.$$

2.
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{2n-1}}{\sqrt{n+3+3}}.$$

3.
$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2-3} - \sqrt{n^2-n+1}).$$

4.
$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{2n^3-2n^2+1} - \sqrt[3]{2n^3+n^2+1}).$$

5.
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 8} + \dots \right).$$

6.
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n-2)^4 - (n+2)^4}{(n-2)^3 + (n+2)^3}.$$

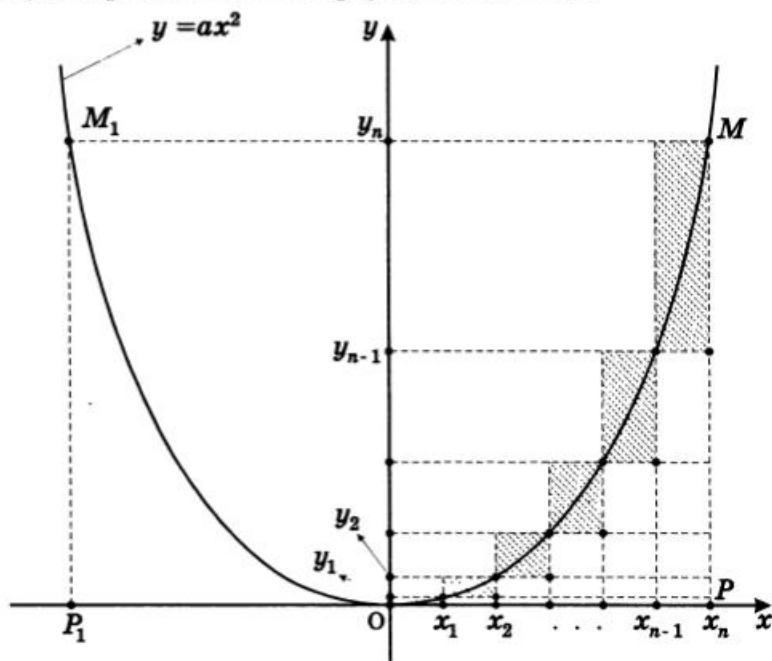
7.
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^3+6n^2+12n+8} - \sqrt{n(n+1)(n+3)}}{\sqrt{n+3}}.$$

8.
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[4]{n} - 16n^2}{4n - \sqrt[5]{32n^{10} + 1}}.$$

Применение теории пределов для вычисления площадей

Задача. Вычислить площадь криволинейного треугольника OPM (см. чертеж), ограниченного $\Gamma y = ax^2$ (графиком), осью абсцисс и прямой $x = P$.

1. Разобьем $[OP]$ на N равных частей и построим на них ряд прямоугольников, находящихся внутри криволинейного треугольника и вне его (объемлющих). Q – площадь криволинейного треугольника OPM .



Фигура Q'_n состоит ступенчатых фигур внутри криволинейного треугольника.

Q''_n состоит из ступенчатых фигур, объемлющих криволинейный треугольник. Ясно, что $Q'_n < Q < Q''_n$.

Далее $\frac{OP}{n} \cdot PM = \frac{x}{n} \cdot y$ – площадь наибольшего прямоугольника. Она равна разности площадей

$Q''_n - Q'_n = \frac{x \cdot y}{n}$, так как разность для каждого из прямоугольников отмечена заштрихованным прямоугольником и вкладывается в большой

прямоугольник. При $(n \rightarrow \infty)$ следует $\left(\frac{xy}{n} \rightarrow 0\right)$.

т. е. что $(Q''_n - Q'_n) \rightarrow 0$, значит $\lim_{n \rightarrow \infty} Q''_n = \lim_{n \rightarrow \infty} Q'_n = Q$.

1) Рассмотрим абсциссы точек деления отрезка OP.

$$\frac{1}{n}x; \frac{2}{n}x; \frac{3}{n}x; \dots; \frac{k}{n}x; \dots; \frac{n}{n}x$$

$$\left(OP = x; x_1 = \frac{1}{n}x; x_2 = \frac{2}{n}x; \dots; x_n = \frac{n}{n}x\right).$$

2) Рассмотрим ординаты этих точек (высоты прямоугольников).

$$a \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^2 x^2; a \cdot \left(\frac{2}{n}\right)^2 x^2; a \cdot \left(\frac{3}{n}\right)^2 x^2; \dots; a \cdot \left(\frac{k}{n}\right)^2 x^2; \dots; a \cdot \left(\frac{n}{n}\right)^2 x^2, \text{ где}$$

$$y_1 = ax_1^2 = a \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^2 x^2; y_2 = ax_2^2 = a \cdot \left(\frac{2}{n}\right)^2 x^2; \dots; y_k = a \cdot \left(\frac{k}{n}\right)^2 x^2;$$

$$y_n = a \cdot \left(\frac{n}{n}\right)^2 x^2.$$

Тогда площадь Q_n , как сумма прямоугольников, равна

$$Q''_n = a \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^2 x^2 \cdot \frac{x}{n} + a \cdot \left(\frac{2}{n}\right)^2 \cdot x^2 \cdot \frac{x}{n} + a \cdot \left(\frac{3}{n}\right)^2 \cdot x^2 \cdot \frac{x}{n} + \dots$$

$$\dots + a \cdot \left(\frac{k}{n}\right)^2 \cdot x^2 \cdot \frac{x}{n} + \dots + a \cdot \left(\frac{n}{n}\right)^2 \cdot x^2 \cdot \frac{x}{n} =$$

$$= \frac{ax^3}{n^3} (1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + k^2 + \dots + n^2) =$$

$$= \frac{ax^3}{n^3} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{ax^3}{6} \cdot \frac{(n+1)(2n+1)}{n^2} \text{ на основании}$$

известного тождества Архимеда

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

$$2. Q = \lim_{n \rightarrow \infty} Q_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{ax^3}{6} \cdot \frac{(n+1)(2n+1)}{n^2} = \frac{ax^3}{3} = \frac{y \cdot x}{3}, \text{ где}$$

Q – площадь криволинейного треугольника OPM ;

ax^3 – постоянная, вынесенная за знак предела;

$$ax^2 = y.$$

Обозначим $S_{n.c.}$ площадь параболического сегмента.

$$S_{PMM_1P_1} = 2xy.$$

Значит $S_{n.c.} = S_{PMM_1P_1} - 2S_{OPM} = 2xy - \frac{2xy}{3} = \frac{4}{3}xy$, тогда

$$S_{n.c.} = \frac{2}{3}S_{PMM_1P_1}.$$

Тогда площадь параболического сегмента равна $\frac{2}{3}$ площади объемлющего его прямоугольника.
(Теорема Архимеда, доказанная им самим.)

4

Прогрессии

Арифметическая прогрессия

Рассмотрим несколько последовательностей.

$$a_n - 1; 4; 7; 10; 13; \dots$$

$$b_n - 2; 6; 10; 14; 18; \dots$$

$$c_n - 7; 2; -3; -8; -13; \dots$$

Все они обладают одним интересным свойством. Интересно, а каким? Если внимательно присмотреться и проанализировать, то можно заметить, что:

в последовательности a_n все члены последовательности, стоящие рядом, отличаются на 3;

в последовательности b_n все члены последовательности, стоящие рядом, отличаются на 4;

в последовательности c_n все члены последовательности, стоящие рядом, отличаются на -5 .

Выделим такой тип последовательностей и дадим ему имя.

Определение 1. Последовательность a_n называется **арифметической прогрессией**, если разность между любым последующим ее членом и предыдущим, стоящим рядом, есть величина постоянная, которая обозначается d и называется **разностью прогрессии**.

Иногда определяют и так.

Последовательность a_n называется **арифметической прогрессией**, если она задана рекуррентным соотношением

$$a_{n+1} = a_n + d.$$

Здесь d – постоянная величина, называемая разностью прогрессии; a_1 – заданное начальное условие.

Очевидно, что по смыслу определения совпадают.

Рассмотрим закономерность образования арифметической прогрессии и попытаемся выявить функциональную зависимость n -го члена прогрессии от его номера.

Итак, дано $a_{n+1} = a_n + d$.

$$n = 1; a_2 = a_1 + d;$$

$$n = 2; a_3 = a_2 + d = a_1 + d + d = a_1 + 2d;$$

$$n = 3; a_4 = a_3 + d = a_1 + 2d + d = a_1 + 3d;$$

$$n = 4; a_5 = a_4 + d = a_1 + 3d + d = a_1 + 4d;$$

Прослеживается закономерность

$$a_n = a_1 + (n - 1)d,$$

т.е. получили формулу n -го члена. Строгое доказательство этого факта возможно только методом математической индукции.

Для следующих последовательностей запишем формулу n -го члена.

1. $a_n - 1; 4; 7; 10; 13; \dots$

Очевидно, что $a_1 = 1; d = 3$; тогда $a_n = 1 + (n - 1)3$,

т.е. $a_n = 3n - 2$.

2. $b_n - 2; 6; 10; 14; 18; \dots$

Ясно, что здесь $b_1 = 2; d = 4$; тогда $b_n = 2 + (n - 1) \cdot 4$;

т.е. $b_n = 4n - 2$.

3. $c_n - 7; 2; -3; -8; -13; \dots$

Здесь $c_1 = 7; d = -5$; тогда $c_n = 7 + (n - 1)(-5)$,

т.е. $c_n = -5n + 12$.

Интересно отметить, что во всех рассматриваемых случаях, n -й член прогрессии есть линейная функция. Может быть это всегда?

Теорема 1.

Для того чтобы последовательность a_n являлась арифметической прогрессией, необходимо и достаточно, чтобы a_n являлась линейной функцией.

Необходимость.

Пусть a_n арифметическая прогрессия. Тогда, как было уже показано, $a_n = a_1 + (n - 1)d$, т.е. $a_n = nd + a_1 - d$.

Так как $f(x) = ax + b$ есть линейная функция и $x \in \mathbb{N}$, это

значит, что $\begin{matrix} a = d \\ b = a_1 - d \end{matrix}$, т.е. a_n — линейная функция, где

$$f(n) = nd + a_1 - d.$$

Достаточность.

Пусть последовательность a_n линейная функция, т.е.

$a_n = a \cdot x + b$. Так как $n \in \mathbb{N}$ и $x = n$, то $a_n = a \cdot n + b$,

тогда $a_{n+1} = a(n + 1) + b$.

Рассмотрим $a_{n+1} - a_n = (a(n + 1) + b) - (an + b)$.

Отсюда следует, что $a_{n+1} - a_n = a$, где a — величина постоянная. Тогда $a_{n+1} = a_n + a$, а это значит по определению, что

a_n — арифметическая прогрессия.

Теорема доказана.

Теорема 2.

Пусть a_n арифметическая прогрессия.

Тогда $a_k + a_{n-k+1} = a_1 + a_n$, т.е. сумма двух членов прогрессии, стоящих в левой части выражения, совпадает с суммой двух членов этой же прогрессии из правой части, если суммы их индексов равны.

Доказательство проведем напрямую.

$$\begin{aligned} a_{n-k+1} &= a_1 + (n-k+1-1)d = a_1 + (n-k)d \\ + \frac{a_k}{a_k + a_{n-k}} &= \frac{a_1 + (k-1)d}{a_1 + (n-k)d + a_1 + (k-1)d} = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2a_1 + (n-1)d} = \\ &= a_1 + a_1 + (n-1)d = a_1 + a_n, \text{ что и требовалось доказать.} \end{aligned}$$

Таким образом, $a_k + a_{n-k+1} = a_1 + a_n$.

Рассмотрим характеристическое свойство арифметической прогрессии, т.е. теорему о признаке арифметической прогрессии.

Теорема 3.

Для того чтобы последовательность a_n являлась арифметической прогрессией, необходимо и достаточно, чтобы любой ее член, начиная со второго, был равен среднему арифметическому рядом стоящих ее членов, т.е. $a_{n+1} = \frac{a_n + a_{n+2}}{2}$ для $\forall n \in \mathbb{N}$.

Достаточность.

Пусть для последовательности a_n выполняется соотношение $a_{n+1} = \frac{a_n + a_{n+2}}{2}$, тогда $2a_{n+1} = a_n + a_{n+2}$, что можно преобразовать в $a_{n+1} - a_n = a_{n+2} - a_{n+1}$. Это значит, что разность между любыми, рядом стоящими членами последовательности величина постоянная, или что a_n — арифметическая прогрессия.

Необходимость.

Пусть a_n арифметическая прогрессия, т.е. $a_{n+1} = a_1 + nd$.

$$\text{Тогда } \left. \begin{aligned} a_n &= a_1 + (n-1)d \\ a_{n+2} &= a_1 + (n+1)d \end{aligned} \right\}$$

Тогда сложим почленно левые и правые части равенств.

$$\frac{a_n + a_{n+2}}{2} = \frac{a_1 + (n-1)d + a_1 + (n+1)d}{2} = a_1 + nd.$$

Таким образом, получим, что $a_{n+1} = \frac{a_n + a_{n+2}}{2}$.

Что и требовалось доказать.

Практикум 16

Дано: $a_n - \div$ (так будет обозначаться арифметическая прогрессия), определенная следующими условиями.

$$1. \begin{cases} a_2 + a_8 = 10 \\ a_3 + a_{14} = 31 \end{cases}$$

Найти: $a_1 = ?$; $d = ?$

Выразим все в каждом уравнении через a_1 и d .

$$\text{Получим } \begin{cases} a_1 + d + a_1 + 7d = 10 \\ a_1 + 2d + a_1 + 13d = 31 \end{cases}; \quad \begin{cases} 2a_1 + 8d = 10 \\ 2a_1 + 15d = 31 \end{cases}.$$

Вычтем из второго уравнения первое. Получим $7d = 21$; $d = 3$. Подставляя, имеем $a_1 = -7$.

Ответ: $a_1 = -7$; $d = 3$.

$$2. \begin{cases} a_2 + a_4 + a_6 = 36 \\ a_2 \cdot a_3 = 54 \end{cases}$$

Найти: $a_1 = ?$; $d = ?$

Поступим аналогичным образом.

$$\begin{cases} a_1 + d + a_1 + 3d + a_1 + 5d = 36 \\ (a_1 + d)(a_1 + 2d) = 54 \end{cases}; \quad \begin{cases} a_1 + 3d = 12 \\ (a_1 + d)(a_1 + 2d) = 54 \end{cases};$$

$$\begin{cases} a_1 = 12 - 3d \\ (12 - 3d + d)(12 - 3d + 2d) = 54 \end{cases}; \quad \begin{cases} a_1 = 12 - 3d \\ 2(6 - d)(12 - d) = 54 \end{cases};$$

Уравнение решаем по теореме Виета:

$$72 - 18d + d^2 = 27;$$

$$d^2 - 18d + 45 = 0;$$

$$d = 15; a_1 = -33;$$

$$d = 3; a_1 = 3.$$

Ответ: 1. $\begin{cases} a_1 = -33 \\ d = 15 \end{cases}$; 2. $\begin{cases} a_1 = 3 \\ d = 3 \end{cases}$.

Задача. Найти сумму всех двузначных чисел, кратных 3. Можно, конечно, решать задачу «в лоб», но это уж больно утомительно. Попробуем иначе. Выпишем сумму членов последовательности таких чисел в прямом и обратном порядке и, сложив почленно, получим двойную сумму.

$$+ \frac{12 + 15 + 18 + 21 + \dots + 93 + 96 + 99}{(12 + 99) + (15 + 96) + (18 + 93) + \dots + (93 + 18) + (96 + 15) + (99 + 18)},$$

т. е. $111 + 111 + 111 + \dots + 111 + 111 + 111 = S_n$.

Сколько же членов в этой последовательности? Решим этот вопрос.

$$\left. \begin{array}{l} a_n = 99 \\ a_1 = 12 \\ d = 3 \\ n = ? \end{array} \right\}$$

Так как $a_n = a_1 + (n - 1)d$, то после преобразований

получим $n = \frac{a_n - a_1 + d}{d}$, т. е. $n = \frac{99 - 12 + 3}{3} = 30$.

Значит $2S_{30} = 111 \cdot 30 = 3330$; $S_{30} = 1665$.

Попробуем теперь вывести общую формулу суммы первых n членов арифметической прогрессии.

Теорема 4. О выводе формулы суммы первых n членов арифметической прогрессии.

Запишем в прямом и обратном порядке сумму первых n членов арифметической прогрессии и сложим почленно левую и правую часть равенств.

$$+ \frac{S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_k + \dots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n}{S_n = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \dots + a_{n-k+1} + \dots + a_2 + a_1} \\ 2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + \dots + (a_k + a_{n-k+1}) + \dots + (a_{n-2} + a_3) + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1)$$

Так как по теореме 2 суммы индексов в каждой сумме в скобках совпадают, то все они равны между собой. Тогда

$$2S_n = (a_1 + a_n) \cdot n. \text{ Значит } S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n.$$

С учетом $a_n = a_1 + (n - 1)d$ формула

примет несколько иной вид: $S_n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n$.

Практикум 17

1. Найти: сумму всех двузначных чисел, кратных 4.

$$\left. \begin{array}{l} a_1 = 12 \\ a_n = 96 \\ d = 4 \end{array} \right\}$$

Так как $n = \frac{a_n - a_1 + d}{d}$, получим $n = \frac{96 - 12 + 4}{4} = 22$.

Тогда $S_{22} = \frac{a_1 + a_{22}}{2} \cdot 22$, т.е.

$$S_{22} = \frac{12 + 96}{2} \cdot 22 = 54 \cdot 22 = 1188.$$

Ответ: $S_n = 1188$.

2. Решить уравнение.

$$2 + 5 + 8 + 11 + \dots + x = 155$$

Ясно, что здесь сумма связана с арифметической прогрессией.

$$\left. \begin{array}{l} a_1 = 2 \\ a_n = x \\ S_n = 155 \\ d = 3 \end{array} \right\}$$

Найдем n .

$$1) \quad n = \frac{a_n - a_1 + d}{d}; \quad n = \frac{x - 2 + 3}{3} = \frac{x + 1}{3};$$

$$2) \quad S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n.$$

$$\text{Можно записать } 155 = \frac{2 + x}{2} \cdot \frac{x + 1}{3};$$

$$155 \cdot 6 = x^2 + 3x + 2; \quad x^2 + 3x - 928 = 0;$$

$$x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 928 \cdot 4}}{2} = \frac{-3 \pm 61}{2}; \quad \begin{cases} x = -32 \notin [0; \infty) \\ x = +29 \end{cases}.$$

Ответ: $x = 29$.

$$3. \begin{cases} S_5 - S_2 - a_5 = 0,1 \\ S_4 + a_7 = 0,1 \end{cases}.$$

Найти d_1 и d , где a_n – арифметическая прогрессия.

$$S_5 = \frac{2a_1 + 4d}{2} \cdot 5 = (a_1 + 2d)5 = 5a_1 + 10d;$$

$$S_4 = \frac{2a_1 + 3d}{2} \cdot 4 = (2a_1 + 3d)2 = 4a_1 + 6d;$$

$$S_2 = \frac{2a_1 + d}{2} \cdot 2 = 2a_1 + d.$$

Тогда система имеет вид

$$\begin{cases} 5a_1 + 10d - (2a_1 + d) - (a_1 + 4d) = 0,1 \\ 4a_1 + 6d + a_1 + 6d = 0,1 \end{cases};$$

$$\begin{cases} 2a_1 + 5d = 0,1 \\ 5a_1 + 12d = 0,1 \end{cases} \begin{matrix} | 5 \\ | 2 \end{matrix}; \quad - \begin{cases} 10a_1 + 25d = 0,5 \\ 10a_1 + 24d = 0,2 \end{cases}; \quad \begin{cases} d = 0,3 \\ a_1 = -0,7 \end{cases};$$

$$\text{Ответ: } \begin{cases} a_1 = -0,7 \\ d = 0,3 \end{cases}.$$

$$4. \frac{x-1}{x} + \frac{x-3}{x} + \dots$$

Найти: S_n .

Используя формулу $S_n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n$, получим

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{2 \cdot \frac{x-1}{x} + (n-1) \cdot \left(-\frac{2}{x}\right)}{2} \cdot n = \frac{2x-2-2n+2}{2x} \cdot n = \\ &= \frac{2(x-n)n}{2x} = \frac{n(x-n)}{x}. \end{aligned}$$

$$\text{Ответ: } S_n = \frac{n(x-n)}{x}.$$

Рассмотрим еще один признак арифметической прогрессии.

Теорема 5. Для того чтобы последовательность a_n являлась арифметической прогрессией, необходимо и достаточно, чтобы сумма первых n членов последовательности была функцией не выше второй степени относительно n .

Необходимость.

Пусть $a_n - \div$ (арифметическая прогрессия),

$$\text{тогда } S_n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n, \text{ т.е. } S_n = \frac{d \cdot n^2}{2} + \frac{2a_1 - d}{2} \cdot n.$$

Очевидно, что эта функция не выше второй степени относительно n .

Достаточность.

Пусть сумма первых n членов последовательности a_n равна

$$S_n = ax^2 + bx + c, \text{ где } x \in \mathbb{N},$$

$$\text{т.е. } S_n = a \cdot n^2 + b \cdot n + c.$$

$$\text{Тогда } S_{n-1} = a(n-1)^2 + b(n-1) + c;$$

$$\begin{aligned} a_n = S_n - S_{n-1} &= (a \cdot n^2 + b \cdot n + c) - (a(n-1)^2 + b(n-1) + c) = \\ &= a(2n-1) + b = 2an + b - a. \end{aligned}$$

Очевидно, что это линейная функция относительно n , значит по теореме 1 a_n — арифметическая прогрессия.

Практикум 18

1. Дано: $S_n = 2n^2 - n - 6$, где S_n – сумма n первых членов последовательности.

1) Выяснить, является ли эта последовательность арифметической прогрессией.

2) Вычислить $a_5 \cdot a_6$.

1) S_n есть квадратичная функция,

значит a_n – арифметическая прогрессия.

2) Найдем a_n :

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} = (2n^2 - n - 6) - (2(n-1)^2 - (n-1) - 6) = \\ &= \cancel{2n^2} - n - 6 - \cancel{2n^2} + 4n - 2 + n - 1 + 6 = \\ &= 4n - 3; \text{ т.е. } a_n = 4n - 3. \end{aligned}$$

$$\text{Тогда } \begin{array}{l} a_5 = 4 \cdot 5 - 3 = 17 \\ a_6 = 4 \cdot 6 - 3 = 21 \end{array} \quad \Bigg| \quad a_5 \cdot a_6 = 17 \cdot 21 = 357.$$

Ответ: $a_5 \cdot a_6 = 357$.

2. Сумма первых n членов последовательности равна

$S_n = 2n^3 - 21n^2 + 75n$. Найти значение наименьшего члена последовательности.

Очевидно, что мы имеем дело не с арифметической прогрессией, так как S_n – функция третьей степени.

Найдем

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} = \\ &= 2n^3 - 21n^2 + 75n - [2(n-1)^3 - 21(n-1)^2 + 75(n-1)] = \\ &= 2(n^3 - (n-1)^3) - 21(n^2 - (n-1)^2) + 75 = \\ &= 2(n^3 - n^3 + 3n^2 - 3n + 1) - 21(n^2 - n^2 + 2n - 1) + 75 = \\ &= 6n^2 - 48n + 98. \end{aligned}$$

$a_n = 6n^2 - 48n + 98$ – это квадратичная функция.

$a_n = a_{\min}$ при $n_0 = -\frac{-48}{2 \cdot 6} = 4$ (так как $x_0 = -\frac{b}{2a}$ для $y = ax^2 + bx + c$), т.е. a_4 – наименьший член

последовательности. Вычислим значение

$$a_4 = 6 \cdot 4^2 - 48 \cdot 4 + 98, \text{ т.е. } a_4 = 2.$$

Ответ: наименьшее значение члена этой последовательности $a_4 = 2$.

3. Дано:

$$\left. \begin{array}{l} a_n - \div \\ a_3 + a_9 = 8 \end{array} \right\} + \begin{array}{l} a_3 = a_1 + 2d \\ a_9 = a_1 + 8d \\ a_3 + a_9 = 2a_1 + 10d = 8. \end{array}$$

$$S_{11} = ?$$

$$\text{Тогда } a_1 + 5d = 4.$$

$$\text{С другой стороны, } S_{11} = \frac{2a_1 + 10d}{2} \cdot 11 = (a_1 + 5d)11,$$

$$\text{значит } S_{11} = 4 \cdot 11 = 44.$$

$$\text{Ответ: } S_{11} = 44.$$

4. Дано:

$$\left. \begin{array}{l} a_n - \div \\ \begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 56 \\ a_{n-3} + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n = 112 \end{cases} \\ a_1 = 11 \end{array} \right\}$$

$$S_n = ?$$

$$\begin{cases} a_1 + a_1 + d + a_1 + 2d + a_1 + 3d = 56 \\ a_1 + (n-4)d + a_1 + (n-3)d + a_1 + (n-2)d + a_1 + (n-1)d = 112 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1 + a_1 + d + a_1 + 2d + a_1 + 3d = 56 \\ a_1 + (n-4)d + a_1 + (n-3)d + a_1 + (n-2)d + a_1 + (n-1)d = 112 \end{cases}$$

$$\text{Тогда } \begin{cases} 4a_1 + 6d = 56 \\ 4a_1 + (4n - 10)d = 112 \end{cases}; \quad - \begin{cases} 2a_1 + 3d = 28 \\ 2a_1 + (2n - 5)d = 56 \end{cases};$$

$$(8 - 2n)d = -28; \quad (4 - n)d = -14; \quad (n - 4)d = +14.$$

Так как $a_1 = 11$, $2 \cdot 11 + 3 \cdot d = 28$; $d = 2$, тогда

$$(n - 4) \cdot 2 = 14; \quad n = 11.$$

$$S_{11} = \frac{2a_1 + 10d}{2} \cdot 11 = (a_1 + 5d) \cdot 11 = (11 + 10) \cdot 11 = 231.$$

Ответ: $S_{11} = 231$.

5. Найти: сумму всех двузначных чисел, кратных или 3, или 4.

Пусть A_3 – все двузначные числа, кратные трем;

A_4 – все двузначные числа, кратные четырем;

$$m(A_3 \cup A_4) = m(A_3) + m(A_4) - m(A_3 \cap A_4);$$

$A_3 \cap A_4$ – множество всех чисел, кратных 12.

1) Вычислим сумму всех двузначных чисел, кратных 3.

$$\left. \begin{array}{l} a_1 = 12 \\ a_n = 99 \\ d = 3 \end{array} \right\} n = \frac{a_n - a_1 + d}{d}; \text{ то } n = \frac{99 - 12 + 3}{3} = 30,$$

$$S_n = ?$$

$$\text{тогда } S_{30} = \frac{a_1 + a_{30}}{2} \cdot 30 = \frac{12 + 99}{2} \cdot 30 = 1665,$$

т.е. $S(A_3) = 1665$.

2) Вычислим сумму всех двузначных чисел кратных 4.

$$\left. \begin{array}{l} a_1 = 12 \\ a_n = 96 \\ d = 4 \end{array} \right\} n = \frac{96 - 12 + 4}{4} = 22; \quad S_{22} = \frac{12 + 96}{2} \cdot 22 = 1188,$$

$$S_n = ?$$

т.е. $S(A_4) = 1188$.

Вычислим сумму всех двузначных чисел, кратных 12.

$$\left. \begin{array}{l} a_1 = 12 \\ a_n = 96 \\ d = 12 \\ S_n = ? \end{array} \right\} n = \frac{96-12+12}{12} = 8;$$

$$S_8 = \frac{2 \cdot 12 + 7 \cdot 12}{2} \cdot 8 = 54 \cdot 8 = 432, \text{ т.е. } S(A_3 \cap A_4) = 432.$$

Так как $m(A_3 \cup A_4) = m(A_3) + m(A_4) - m(A_3 \cap A_4)$,

то $S(A_3 \cup A_4) = S(A_3) + S(A_4) - S(A_3 \cap A_4)$.

Тогда $S(A_3 \cup A_4) = 1665 + 1188 - 432 = 2421$.

Ответ: сумма всех двузначных чисел, кратных или 3, или 4, равна 2421.

Примечания.

Под $S(A_3)$ мы будем понимать *сумму* всех двузначных чисел, кратных 3.

Под $S(A_4)$ мы будем понимать *сумму* всех двузначных чисел, кратных 4.

Под $S(A_3 \cup A_4)$ мы будем понимать *сумму* всех двузначных чисел, кратных или 3, или 4.

Под $S(A_3 \cap A_4)$ мы будем понимать *сумму* всех двузначных чисел, кратных 3 и 4.

Тренировочная работа 13

1. $a_n - \div$

$$\begin{cases} a_1 + a_7 = 4 \\ a_3^2 + a_7^2 = 122 \end{cases}$$

$$a_1 = ?; \quad d = ?$$

2. Решить уравнение

$$1 - 5 - 11 - \dots - x = -207$$

$$x = ?$$

3. $a_n - \div$

$$\begin{cases} a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 34 \\ a_2 \cdot a_3 = 28 \end{cases}$$

$$a_1 = ?; \quad d = ?$$

4. $a; b; c$ – последовательные члены арифметической прогрессии.

Доказать, что

$$\frac{2}{9}(a + b + c)^3 = a^2(b + c) + b^2(a + c) + c^2(a + b).$$

5. $a_n - \div$

$$\begin{cases} S_n = 820 \\ a_1 = 3 \\ d = 4 \end{cases}$$

$$a_n = ?$$

Решение тренировочной работы 13

1. $a_n - \div$

$$\begin{cases} a_1 + a_7 = 4 \\ a_3^2 + a_7^2 = 122 \end{cases}$$

$a_1 = ? \quad d = ?$

$$\begin{cases} a_1 + a_1 + 6d = 4 \\ (a_1 + 2d)^2 + (a_1 + 6d)^2 = 122 \end{cases};$$

$$\begin{cases} a_1 + 3d = 2 \\ (a_1 + 2d)^2 + (a_1 + 6d)^2 = 122 \end{cases};$$

$$\begin{cases} a_1 + 3d = 2 \\ (2 - 3d + 2d)^2 + (2 - 3d + 6d)^2 = 122 \end{cases};$$

$$\begin{cases} a_1 + 3d = 2 \\ (2 - d)^2 + (2 + 3d)^2 = 122 \end{cases};$$

Решим второе уравнение.

$4 - 4d + d^2 + 4 + 12d + 9d^2 = 122;$

$10d^2 + 8d - 114 = 0;$

$5d^2 + 4d - 57 = 0;$

$$\begin{cases} d = 3; & a_1 = -7 \\ d = -3,8; & a_1 = 13,4 \end{cases}$$

Ответ: 1) $a_1 = -7; \quad d = 3;$ 2) $a_1 = -13,4; \quad d = -3,8.$

2. $1 - 5 - 11 - \dots - x = -207.$

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ d = -6 \\ a_n = -x \\ S_n = -207 \end{cases}$$

$x = ?$

Похоже, в левой части уравнения имеем дело с арифметической прогрессией.

$$n = \frac{a_n - a_1 + d}{d}, \text{ т.е. } n = \frac{-x - 1 - 6}{-6} = \frac{x+7}{6}; S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n,$$

$$\text{тогда } -207 = \frac{(1-x)(x+7)}{2.6}; \quad -x^2 - 6x + 7 + 207 \cdot 12 = 0;$$

$$x^2 + 6x - 2491 = 0;$$

$$x_{1,2} = -3 \pm \sqrt{9 + 2491} = -3 \pm 50; \quad \begin{cases} x = -53 \notin [0; \infty) \\ x = 47 \end{cases}.$$

Ответ: $x = 47$.

3. $a_n - \div$

$$a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 34$$

$$a_2 \cdot a_3 = 28$$

$$a_1 = ? \quad d = ?$$

$$\begin{cases} a_1 + d + a_1 + 2d + a_1 + 3d + a_1 + 4d = 34 \\ (a_1 + d)(a_1 + 2d) = 28 \end{cases};$$

$$\begin{cases} 4a_1 + 10d = 34 \\ (a_1 + d)(a_1 + 2d) = 28 \end{cases}; \quad \begin{cases} a_1 = \frac{17-5d}{2} \\ \left(\frac{17-5d}{2} + d\right)\left(\frac{17-5d}{2} + 2d\right) = 28 \end{cases};$$

$$\begin{cases} a_1 = \frac{17-5d}{2} \\ (17-3d)(17-d) = 112 \end{cases}; \quad \begin{cases} a_1 = \frac{17-5d}{2} \\ 3d^2 - 68d + 177 = 0 \end{cases};$$

$$\begin{cases} a_1 = \frac{17-5d}{2} \\ \left[\begin{array}{l} d = 3 \\ d = \frac{59}{3} \end{array} \right]; \end{cases}$$

$$1) \begin{cases} d = 3 \\ a_1 = \frac{17-5 \cdot 3}{2} \end{cases}; \quad \begin{cases} d = 3 \\ a_1 = 1 \end{cases};$$

$$2) \begin{cases} d = 19\frac{2}{3} \\ a_1 = \frac{17-5 \cdot \frac{59}{3}}{2} \end{cases}; \quad \begin{cases} d = 19\frac{2}{3} \\ a_1 = -40\frac{2}{3} \end{cases};$$

$$\text{Ответ: } 1) \begin{cases} a_1 = 1 \\ d = 3 \end{cases}; \quad 2) \begin{cases} a_1 = -40\frac{2}{3} \\ d = 19\frac{2}{3} \end{cases}.$$

4. $a; b; c$; — ÷ Докажите, что тогда

$$\frac{2}{9}(a+b+c)^3 = a^2(b+c) + b^2(a+c) + c^2(a+b).$$

Так как мы имеем дело с арифметической прогрессией, то $b = a + d$,
тогда левая часть выражения будет $c = a + 2d$

$$\begin{aligned} L &= \frac{2}{9}(a+a+d+a+2d)^3 = \frac{2}{9}(3a+3d)^3 = \\ &= \frac{2}{9} \cdot 27(a+d)^3 = 6(a+d)^3. \end{aligned}$$

Правая будет иметь вид

$$\begin{aligned} \Pi &= a^2(a+d+a+2d) + (a+d)^2(a+a+2d) + (a+2d)^2(a+a+d) = \\ &= a^2(2a+3d) + 2(a+d)^3 + (a^2+4ad+4d^2)(2a+d) = \\ &= 2a^3 + 3a^2d + 2(a+d)^3 + 2a^3 + 9a^2d + 12ad^2 + 4d^3 = \\ &= 4a^3 + 12a^2d + 12ad^2 + 4d^3 + 2(a+d)^3 = \\ &= 4(a^3 + 3a^2d + 3ad^2 + d^3) + 2(a+d)^3 = 6(a+d)^3, \end{aligned}$$

т. е. $L = \Pi$, что и требовалось доказать.

5. a_n — ÷

$$S_n = 820$$

$$a_1 = 3$$

$$d = 4$$

$$a_n = ?$$

$$S_n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n; \quad 820 = \frac{6+4(n-1)}{2}n;$$

$$820 = 2n^2 + n; \quad 2n^2 + n - 820 = 0; \quad \begin{cases} n = 20 \\ n = -20,5 \notin \mathbb{N} \end{cases}$$

$$a_{20} = a_1 + 19d;$$

$$a_{20} = 3 + 19 \cdot 4 = 79.$$

Ответ: $a_{20} = 79$.

Геометрическая прогрессия

Рассмотрим еще несколько последовательностей и попытаемся сформулировать их общие свойства.

$$A_n - 1; 4; 16; 64; 256; \dots$$

$$B_n - \frac{1}{3}; \frac{1}{9}; \frac{1}{27}; \frac{1}{81}; \frac{1}{243}; \dots$$

$$C_n - \frac{2}{5}; -\frac{4}{25}; \frac{8}{125}; -\frac{16}{625}; \frac{32}{3125}; \dots$$

$$P_n - 3; 3; 3 \dots$$

Наблюдения подсказывают, что каждый последующий член этих последовательности отличается в k раз от предыдущего.

Для $A_n - k = 4$;

$$B_n - k = \frac{1}{3};$$

$$C_n - k = -\frac{2}{5};$$

$$P_n - k = 1.$$

Теперь сформулируем более точно их особенности и дадим имя.

Определение 2. Последовательность называется **геометрической прогрессией**, если отношение каждого последующего члена последовательности к рядом стоящему предыдущему члену есть величина постоянная, равная постоянному q , называемому **знаменателем прогрессии**.

Или возможно другое определение: последовательность b_n , заданная рекуррентным соотношением $b_{n+1} = b_n \cdot q$, называется **геометрической прогрессией**.

Здесь $q \neq 0$ – постоянная величина, называемая **знаменателем прогрессии**; $b_1 \neq 0$ – начальное значение.

(Геометрическая прогрессия обозначается $b_n - \ddot{\cdot}$.)

Рассмотрим закономерность образования геометрической прогрессии и попытаемся выявить функциональную зависимость n -го члена геометрической прогрессии от его номера.

$$b_2 = b_1 \cdot q;$$

$$b_3 = b_2 \cdot q = b_1 \cdot q^2;$$

$$b_4 = b_3 \cdot q = b_1 \cdot q^3;$$

$$b_5 = b_4 \cdot q = b_1 \cdot q^4.$$

Значит $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$.

Строгое доказательство возможно только методом математической индукции.

Практикум 19

1. Записать общий член прогрессий.

$$1) b_n - \dots \quad 1; 4; 16; 64; 256 \dots$$

(Предполагается, что характер изменения постоянный.)

$$\begin{array}{l} \text{Так как } b_1 = 1; q = 4 \\ \text{и } b_n = b_1 \cdot q^{n-1} \end{array} \quad \left| \quad \begin{array}{l} \text{, то } b_n = 1 \cdot 4^{n-1}, \\ \text{т. е. } b_n = 4^{n-1}. \end{array} \right.$$

$$2) b_n - \dots \quad -\frac{1}{3}; \frac{1}{9}; \frac{1}{27}; \frac{1}{81}; \frac{1}{243}; \dots$$

$$\begin{array}{l} \text{Так как } b_1 = \frac{1}{3}; q = \frac{1}{3} \\ \text{и } b_n = b_1 \cdot q^{n-1} \end{array} \quad \left| \quad \begin{array}{l} \text{, то } b_n = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}, \\ \text{т. е. } b_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n. \end{array} \right.$$

$$3) b_n - \dots \quad \frac{2}{5}; -\frac{4}{25}; \frac{8}{125}; -\frac{16}{625}; \frac{32}{3125}; \dots$$

$$\begin{array}{l} \text{Так как } b_1 = \frac{2}{5}; q = -\frac{2}{5} \\ \text{и } b_n = b_1 \cdot q^{n-1} \end{array} \quad \left| \quad \begin{array}{l} \text{, то } b_n = \frac{2}{5} \cdot \left(-\frac{2}{5}\right)^{n-1}, \\ \text{т. е. } b_n = (-1)^{n-1} \left(\frac{2}{5}\right)^n. \end{array} \right.$$

2. Доказать, что последовательность, заданная $b_n = 5^{3n}$, является геометрической прогрессией.

$$\text{Рассмотрим } \frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{5^{3(n+1)}}{5^{3n}} = 5^3 - \text{ это постоянная величина.}$$

Так как $b_{n+1} = 125 \cdot b_n$, то по определению последовательность b_n является геометрической прогрессией.

3. Выяснить, принадлежит ли число $\frac{3750}{243}$ последовательности $2; \frac{10}{3}; \frac{50}{9}; \dots$, и найти его номер, если это так.

$$\text{Так как } b_1 = 2; b_2 = \frac{10}{3}; b_3 = \frac{50}{9}, \quad \frac{b_2}{b_1} = \frac{5}{3}; \quad \frac{b_3}{b_2} = \frac{5}{3},$$

то это геометрическая прогрессия.

Здесь $q = \frac{5}{3}$, а $b_n = 2 \cdot \left(\frac{5}{3}\right)^{n-1}$, тогда $\frac{3750}{243} = 2 \cdot \left(\frac{5}{3}\right)^{n-1}$;

$$\frac{1875}{243} = \left(\frac{5}{3}\right)^{n-1}; \quad \frac{3 \cdot 625}{3 \cdot 81} = \left(\frac{5}{3}\right)^{n-1}.$$

Тогда $\left(\frac{5}{3}\right)^4 = \left(\frac{5}{3}\right)^{n-1} \Rightarrow 4 = n - 1$, т.е. $n = 5$.

Итак, $b_5 = \frac{3750}{243}$, т.е. число $\frac{3750}{243}$ есть пятый член геометрической прогрессии.

4. $b_n - \dots$

$$\begin{cases} b_1 + b_2 = 8 \\ b_4 + b_5 = 216 \end{cases}$$

$$b_1 = ?$$

$$q = ?$$

$$\begin{cases} b_1 + b_1 \cdot q = 8 \\ b_1 \cdot q^3 + b_1 \cdot q^4 = 216 \end{cases}; \quad \begin{cases} b_1(1 + q) = 8 \\ b_1 q^3(1 + q) = 216 \end{cases}; \quad \boxed{2} : \boxed{1}$$

тогда $q^3 = 27$; $q = 3$, а $b_1 = 2$.

Ответ: $b_1 = 2$; $q = 3$.

5. $b_n - \dots$

$$\begin{cases} b_4 = -\frac{5}{2} \\ b_6 = -\frac{5}{8} \\ b_1 = ? \end{cases} \quad \begin{cases} b_4 = b_1 \cdot q^3 = -\frac{5}{2} \\ b_6 = b_1 \cdot q^5 = -\frac{5}{8} \end{cases}; \quad \boxed{2} : \boxed{1}$$

$$q^2 = \frac{1}{4}; \quad \begin{cases} q = \frac{1}{2}; & b_1 = -20 \\ q = -\frac{1}{2}; & b_1 = 20. \end{cases}$$

Ответ: $b_1 = 20$ или $b_1 = -20$.

Характеристические признаки геометрической прогрессии

Теорема 6.

Для того, чтобы последовательность являлась геометрической прогрессией необходимо и достаточно чтобы квадрат любого последующего члена последовательности был равен произведению рядом стоящих членов последовательности.

$$\boxed{b_{n+1}^2 = b_n \cdot b_{n+2}} \quad \text{для } \forall n \in \mathbb{N}.$$

Доказательство:

Необходимость.

Пусть $b_n = \dots$,

тогда

$$b_n = b_1 \cdot q^{n-1}; \quad b_{n+2} = b_1 \cdot q^{n+1}; \quad b_{n+1} = b_1 \cdot q^n;$$

$$\left. \begin{aligned} b_n \cdot b_{n+2} &= b_1^2 \cdot q^{2n} \\ b_{n+1}^2 &= b_1^2 \cdot q^{2n} \end{aligned} \right\}, \text{ значит } b_n \cdot b_{n+2} = b_{n+1}^2.$$

Достаточность.

Пусть для любого последующего члена последовательности выполняется соотношение $b_{n+1}^2 = b_n \cdot b_{n+2}$.

$$\text{Тогда } \frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{b_{n+2}}{b_{n+1}} = q,$$

т.е. отношение любого последующего члена последовательности к предыдущему есть величина постоянная.

Это значит, что по определению

последовательность b_n – геометрическая прогрессия, что и требовалось доказать.

Примечание. Теорема верна и в более общем виде,

$$\text{т.е. } \boxed{b_n^2 = b_{n-m} \cdot b_{n+m}} \quad \text{для } \forall n > m; \quad n; m \in \mathbb{N}.$$

Задача. $b_n - \dots$

$$b_1 = 2$$

$$q = 3$$

$$S_n = ?$$

1. Выпишем сумму членов последовательности

$$S_n = 2 + 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3^3 + \dots + 2 \cdot 3^{n-1}.$$

Умножим обе части выражения на 3.

$$3S_n = 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3^3 + \dots + 2 \cdot 3^{n-1} + 2 \cdot 3^n.$$

2. Вычтем последовательно из первого равенства второе равенство и сгруппируем второй член первого равенства с первым членом второго равенства.

$$\text{Получим } S_n - 3S_n =$$

$$= 2 + \underline{(2 \cdot 3 - 2 \cdot 3)} + \underline{(2 \cdot 3^2 - 2 \cdot 3^2)} + \dots + \underline{(2 \cdot 3^{n-1} - 2 \cdot 3^{n-1})} + (0 - 2 \cdot 3^n).$$

Все выражения в скобках, кроме последнего, взаимно уничтожаются и остается $-2S_n = 2 - 2 \cdot 3^n$.

Тогда $S_n = 3^n - 1$, что и требовалось найти.

Теорема 7.

Сумма первых членов геометрической прогрессии равна

$$1. \quad S_n = \frac{b_1(1-q^n)}{1-q} \quad \text{для } \forall n \in \mathbb{N}; \quad q \neq 1.$$

$$2. \quad S_n = n \cdot b_1, \quad \text{если } q = 1.$$

Доказательство проведем аналогично.

$$S_n = b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + \dots + b_n.$$

Преобразуем формулу для S_n .

$$1) \quad S_n = b_1 + b_1q + b_1q^2 + b_1q^3 + \dots + b_1q^{n-1} | \cdot$$

Умножим обе части равенства на $q \neq 0$.

2) Получим

$$S_n \cdot q = b_1q + b_1q^2 + b_1q^3 + b_1q^4 + \dots + b_1q^{n-1} + b_1q^n.$$

Вычтем из первого равенства второе.

Получим $S_n - S_n q = b_1 - b_1 q^n$.

Группируя, получим $S_n(1 - q) = b_1(1 - q^n)$.

а) $q \neq 1$; $S_n = \frac{b_1(1 - q^n)}{1 - q}$;

б) при $q = 1$ $b_1 = b_2 = \dots = b_{n-1} = b_n$, тогда $S_n = nb_1$.

Примечание.

Иногда полезно, зная, что $b_n = b_1 q^{n-1}$ и $S_n = \frac{b_1(1 - q^n)}{1 - q}$, иметь

другой вид $S_n = \frac{b_1 - b_n \cdot q}{1 - q}$.

Теорема доказана полностью.

Практикум 20

$$1. \left. \begin{array}{l} b_n = 3 \cdot 2^n \\ S_5 = ? \end{array} \right\} \text{ Так как } \left. \begin{array}{l} b_n = 3 \cdot 2^n \\ b_{n-1} = 3 \cdot 2^{n-1} \end{array} \right\},$$

$$\text{то } \frac{b_n}{b_{n-1}} = \frac{3 \cdot 2^n}{3 \cdot 2^{n-1}} = 2 = q \text{ и } b_1 = 3 \cdot 2^1 = 6,$$

(имеем дело с $b_n - \ddot{\vdots}$)

$$\text{то } S_5 = \frac{6(1-2^5)}{1-2} = 6(32-1) = 186.$$

Ответ: $S_5 = 186$.

$$2. b_n - \ddot{\vdots}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} b_7 - b_4 = -216 \\ b_5 - b_4 = -72 \\ S_n = 1023 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} b_1 q^6 - b_1 q^3 = -216 \\ b_1 q^4 - b_1 q^3 = -72 \end{array} \right. ,$$

$$b_1 = ?$$

$$q = ?$$

$$n = ? \quad \left\{ \begin{array}{l} b_1 q^3 (q^3 - 1) = -216 \\ b_1 q^3 (q - 1) = -72 \end{array} \right. , \quad \boxed{1} : \boxed{2} \text{ при } q \neq 1$$

$$\text{и получим } q^2 + q + 1 = 3; \quad q^2 + q - 2 = 0;$$

$$\left[\begin{array}{l} q = -2 \\ q = 1 \end{array} \right.$$

не подходит ($q \neq 1$).

Подставим во второе уравнение. Получим

$$b_1(-8)(-2-1) = -72, \quad b_1 = -3. \text{ Тогда } S_n = \frac{b_1(1-q^n)}{1-q} = 1023.$$

$$\text{Подставляя значения } b_1 \text{ и } q, \text{ имеем } \frac{-3 \cdot (1 - (-2)^n)}{1+2} = 1023,$$

$$\text{т.е. } -1 + 1 \cdot (-2)^n = 1023; \quad (-2)^n = 1024 = 2^{10}, \text{ т.е. } n = 10.$$

Ответ: $b_1 = -3; \quad q = -2; \quad n = 10$.

3. $a; b; c; d - \ddot{\vdots}$

Доказать, что тогда

$$(a^2 + b^2 + c^2)(b^2 + c^2 + d^2) = (ab + bc + cd)^2.$$

Доказательство.

Так как $a; b; c; d - \ddot{\vdots}$, то
$$\begin{cases} b^2 = ac \\ c^2 = bd \\ bc = ad \end{cases}$$

по свойству геометрической прогрессии.

Рассмотрим

$$\begin{aligned} L &= (a^2 + b^2 + c^2)(b^2 + c^2 + d^2) = \\ &= a^2b^2 + \underline{b^4} + b^2c^2 + a^2c^2 + b^2c^2 + \underline{c^4} + a^2d^2 + b^2d^2 + c^2d^2 = \\ &= a^2b^2 + \underline{a^2c^2} + 2b^2c^2 + a^2c^2 + \underline{b^2d^2} + a^2d^2 + b^2d^2 + c^2d^2 = \\ &= a^2b^2 + a^2d^2 + c^2d^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 + 2b^2d^2; \\ \Pi &= (ab + bc + cd)^2 = a^2b^2 + \underline{b^2c^2} + c^2d^2 + \underline{2ab^2c} + \underline{2bc^2d} + \underline{2abcd} = \\ &= \underline{2a^2c^2} + \underline{2b^2d^2} + \underline{2b^2c^2} + a^2b^2 + c^2d^2 + \underline{a^2d^2}. \end{aligned}$$

Значит $L = \Pi$, что и требовалось доказать.

4. $b_n - \ddot{\vdots}$

$$\begin{cases} b_{m+n} = 9 \\ b_{m-n} = 4 \end{cases}$$

$$b_m = ?$$

$$b_m^2 = b_{m+n} \cdot b_{m-n} = 9 \cdot 4; \quad b_m^2 = 36$$

по свойству геометрической прогрессии.

Ответ:
$$\begin{cases} b_m = 6 \\ b_m = -6 \end{cases}$$

Тренировочная работа 14

1. $a; b; c; d - \ddot{\vdots}$

Доказать, что $(a - d)^2 = (a - c)^2 + (b - c)^2 + (b - d)^2$.

2. $b_n - \ddot{\vdots}$

$$\begin{cases} b_1 - b_3 + b_5 = -65 \\ b_1 + b_1 q^6 = 325 \end{cases} \quad \begin{matrix} b_1 = ? \\ q = ? \end{matrix}$$

3. $b_n - \ddot{\vdots}$

$$\begin{cases} b_1 + b_5 = 17 \\ b_2 + b_6 = 34 \\ S_n = 31 \end{cases} \quad \begin{matrix} b_1 = ? \\ q = ? \\ n = ? \end{matrix}$$

4. $b_n - \ddot{\vdots}$

$$\begin{cases} b_1 - b_5 = 15 \\ b_1 + b_3 = 20 \end{cases} \quad \begin{matrix} b_1 = ? \\ q = ? \end{matrix}$$

5. Разделите число 2730 на 6 частей числами так, чтобы отношения каждой части к последующей было равно 0,25.

6. $b_n - \ddot{\vdots}$

$$\begin{cases} b_1 + b_2 + b_3 = 21 \\ b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 = 189 \end{cases} \quad \begin{matrix} b_1 = ? \\ q = ? \end{matrix}$$

7. $b_n - \dots$

$$\left. \begin{array}{l} a = b_5 \\ b = b_{13} \\ c = b_{22} \end{array} \right| a^{-9} \cdot b^{17} \cdot c^{-8} = ?$$

8. $b_n - \dots$

$$\left\{ \begin{array}{l} b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_{15} = 15 \\ \frac{1}{b_1} + \frac{1}{b_2} + \frac{1}{b_3} + \dots + \frac{1}{b_{15}} = 60 \end{array} \right| b_8 = ?$$

9. Найдите x , если $\sqrt{x-5}$; $\sqrt[4]{10x+4}$; $\sqrt{x+2} - \dots$

10. Сумма членов геометрической прогрессии, стоящих на нечетных номерах, равна 138, а на четных – 69. Найти знаменатель такой прогрессии, если $n = 1990$.

Решение тренировочной работы 14

1. $a; b; c; d - \ddot{\div}$

Доказать, что $(a - d)^2 = (a - c)^2 + (b - c)^2 + (b - d)^2$.

Доказательство проведем, используя характеристические признаки геометрической прогрессии.

$$b^2 = ac;$$

$$c^2 = bd;$$

$$a \cdot d = b \cdot c;$$

$$\begin{aligned} (a - c)^2 + (b - c)^2 + (b - d)^2 &= \\ &= a^2 - \underline{2ac} + c^2 + b^2 - 2bc + c^2 + b^2 - \underline{2bd} + d^2 = \\ &= a^2 - \underline{2b^2} + c^2 + b^2 - \underline{2cb} + c^2 + b^2 - \underline{2c^2} + d^2 = \\ &= a^2 - \underline{2ad} + d^2 = (a - d)^2. \end{aligned}$$

Таким образом, $(a - d)^2 = (a - c)^2 + (b - c)^2 + (b - d)^2$, что и требовалось доказать.

2. $b_n - \ddot{\div}$

$$\begin{cases} b_1 - b_3 + b_5 = -65 \\ b_1 + b_1q^6 = 325 \end{cases} \quad \begin{cases} b_1 = ? \\ q = ? \end{cases}$$

Выразим все члены прогрессии данной системы через b_1 и q .

$$\begin{cases} b_1 - b_1q^2 + b_1q^4 = -65 \\ b_1 + b_1q^6 = 325 \end{cases}; \quad \begin{cases} b_1(1 - q^2 + q^4) = -65 \\ b_1(1 + q^6) = 325 \end{cases}; \quad \boxed{2} : \boxed{1}$$

$$\frac{1+q^6}{1-q^2+q^4} = 5.$$

Так как $1 + q^6 = (1 + q^2)(1 - q^2 + q^4)$, то $1 + q^2 = 5$.

$$\left\{ \begin{array}{l} q = 2 \\ q = -2 \\ b_1 = \frac{-65}{1-q^2+q^4} \end{array} \right. ; \quad \left\{ \begin{array}{l} q = 2 \\ b_1 = -5 \\ q = -2 \\ b_1 = -5 \end{array} \right.$$

Ответ: 1) $b_1 = -5$; $q = 2$; 2) $b_1 = -5$; $q = -2$.

3. $b_n - \dots$

$$\left\{ \begin{array}{l} b_1 + b_5 = 17 \\ b_2 + b_6 = 34 \\ S_n = 31 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} b_1 = ? \\ q = ? \\ n = ? \end{array}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} b_1 + b_1q^4 = 17 \\ b_1q + b_1q^5 = 34 \end{array} \right. ; \quad \left\{ \begin{array}{l} b_1(1 + q^4) = 17 \\ b_1q(1 + q^4) = 34 \end{array} \right. ; \quad \boxed{2} : \boxed{1} ; \quad q = 2 ;$$

$$\left\{ \begin{array}{l} q = 2 \\ b_1 = \frac{17}{1+q^4} \end{array} \right. ; \quad \left\{ \begin{array}{l} q = 2 \\ b_1 = 1 \end{array} \right. ,$$

но $S_n = \frac{b_1(1-q^n)}{1-q} = 31$, тогда

$$\frac{1 \cdot (1-2^n)}{1-2} = 31 ; \quad 2^n - 1 = 31 ; \quad 2^n = 32 ; \quad 2^n = 2^5 ;$$

т.е. $n = 5$.

Ответ: $n = 5$; $b_1 = 1$; $q = 2$.

4. $b_n - \dots$

$$\left\{ \begin{array}{l} b_1 - b_5 = 15 \\ b_1 + b_3 = 20 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} b_1 = ? \\ q = ? \end{array}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} b_1 - b_1q^4 = 15 \\ b_1 + b_1q^2 = 20 \end{array} \right. ; \quad \left\{ \begin{array}{l} b_1(1 - q^4) = 15 \\ b_1(1 + q^2) = 20 \end{array} \right. ; \quad \boxed{1} : \boxed{2} ;$$

$$\frac{1 - q^4}{1 + q^2} = \frac{3}{4} ; \quad 1 - q^2 = \frac{3}{4} ; \quad q^2 = \frac{1}{4} ;$$

$$\left[\begin{array}{l} q = \frac{1}{2} \\ q = -\frac{1}{2} \end{array} \right]; \quad \left\{ \begin{array}{l} q = \frac{1}{2} \\ b_1 = \frac{20}{1+\frac{1}{4}} \end{array} \right. ; \quad \left\{ \begin{array}{l} q = \frac{1}{2} \\ b_1 = 16 \end{array} \right. ;$$

$$\left\{ \begin{array}{l} q = -\frac{1}{2} \\ b_1 = \frac{20}{1+\frac{1}{4}} \end{array} \right. ; \quad \left\{ \begin{array}{l} q = -\frac{1}{2} \\ b_1 = 16 \end{array} \right.$$

Ответ: 1) $q = \frac{1}{2}$; $b_1 = 16$; 2) $q = -\frac{1}{2}$; $b_1 = 16$.

5. Разделите число 2730 на 6 частей числами так, чтобы отношения каждой части к последующей было равно 0,25. Составим таблицу, зная что

$$b_6 = b_1 q^5 = b_1 4^5 = 1024 b_1 \text{ и}$$

$$S_6 = b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + b_5 + b_6 = 2730.$$

2	8	32	128	512	2048	$S_6 = 2730$
b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	$b_1 = 2$ $q = 4$

$$S_6 = \frac{b_1(1-q^6)}{1-q}, \text{ т.е. } 2730 = \frac{b_1(1-1024 \cdot 4)}{1-4}; \quad 2730 = \frac{4095}{3} b_1;$$

$$b_1 = 2.$$

Итак, имеем числа 2; 8; 32; 64; 128; 512; 2084, которые делят число 2730 на 6 частей, так что отношение каждой части к последующей равно 0,25.

6. $b_n - \div \div$

$$\left\{ \begin{array}{l} b_1 + b_2 + b_3 = 21 \\ b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 = 189 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} b_1 = ? \\ q = ? \end{array}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} b_1 + b_1 q + b_1 q^2 = 21 \\ b_1^2 + b_1^2 q^2 + b_1^2 q^4 = 189 \end{array} \right. ; \quad \left\{ \begin{array}{l} b_1(1 + q + q^2) = 21 \\ b_1^2(1 + q^2 + q^4) = 189 \end{array} \right. ; \quad \boxed{2} : \boxed{1}$$

$$9 = \frac{b_1(1+q^2+q^4)}{1+q+q^2}.$$

Так как $q^4 + q^2 + 1 = (q^2 + q + 1)(q^2 - q + 1)$, то

$$\begin{cases} b_1(1 - q + q^2) = 9 \\ b_1(1 + q + q^2) = 21 \end{cases}; \quad \boxed{2} : \boxed{1}; \quad \frac{1+q+q^2}{1-q+q^2} = \frac{7}{3},$$

тогда $4q^2 - 10q + 4 = 0$.

Так как $2q^2 - 5q + 2 = 0$, то $\begin{cases} q = 2 \\ q = \frac{1}{2} \end{cases}$;

$$\begin{cases} \begin{cases} q = 2 \\ b_1 = \frac{9}{1-q+q^2} \end{cases} \\ \begin{cases} q = \frac{1}{2} \\ b_1 = \frac{9}{1-q+q^2} \end{cases} \end{cases}; \quad \begin{cases} \begin{cases} q = 2 \\ b_1 = 3 \end{cases} \\ \begin{cases} q = \frac{1}{2} \\ b_1 = 12 \end{cases} \end{cases}.$$

Ответ: 1) $b_1 = 3$ и $q = 2$; 2) $b_1 = 12$ и $q = \frac{1}{12}$.

7. $b_n - \dots$

$$\begin{array}{l} a = b_5 \\ b = b_{13} \\ c = b_{22} \end{array} \quad a^{-9} \cdot b^{17} \cdot c^{-8} = ?$$

$$\text{Так как } \begin{cases} a = b_5 = b_1 \cdot q^4 \\ b = b_{13} = b_1 \cdot q^{12} \\ c = b_{22} = b_1 \cdot q^{21} \end{cases},$$

$$a^{-9} = b_1^{-9} \cdot q^{-36}$$

$$\text{тогда } b^{17} = b_1^{17} \cdot q^{12 \cdot 17}.$$

$$c^{-8} = b_1^{-8} \cdot q^{21 \cdot (-8)}$$

$$\text{Отсюда } a^{-9} \cdot b^{17} \cdot c^{-8} = b_1^{-9+17-8} \cdot q^{-36+12 \cdot 17+21 \cdot (-8)} =$$

$$= b_1^0 \cdot q^{204-36-168} = b_1^0 \cdot q^0 = 1.$$

Ответ: $a^{-9} \cdot b^{17} \cdot c^{-8} = 1$.

8. $b_n - \dots$

$$\left\{ \begin{array}{l} b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_{15} = 15 \\ \frac{1}{b_1} + \frac{1}{b_2} + \frac{1}{b_3} + \dots + \frac{1}{b_{15}} = 60 \end{array} \right. \quad b_8 = ?$$

$$\left\{ \begin{array}{l} b_1 + b_1q + b_1q^2 + \dots + b_1q^{14} = 15 \\ \frac{1}{b_1q} + \frac{1}{b_1q} + \frac{1}{b_1q^2} + \dots + \frac{1}{b_1q^{14}} = 60 \end{array} \right.;$$

$$\left\{ \begin{array}{l} b_1(1 + q + q^2 + \dots + q^{14}) = 15 \\ \frac{1}{b_1}(1 + q^{-1} + q^{-2} + \dots + q^{-14}) = 60 \end{array} \right.;$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 15 = b_1(1 + q + q^2 + \dots + q^{14}) = b_1 \cdot \frac{1 - q^{15}}{1 - q} = b_1 \cdot \frac{q^{15} - 1}{q - 1} \\ 60 = \frac{1}{b_1}(1 + q^{-1} + \dots + q^{-14}) = \frac{1 - \left(\frac{1}{q}\right)^{15}}{1 - \frac{1}{q}} \cdot \left(\frac{1}{b_1}\right) = \frac{(q^{15} - 1)}{(q - 1)q^{15}} \cdot \left(\frac{q}{b_1}\right); \end{array} \right.$$

$$\boxed{2} : \boxed{1} \quad 4 = \frac{(q^{15} - 1)q}{(q - 1)q^{15}} \cdot \frac{1}{b_1^2}; \quad 4 = \frac{1}{b_1^2 \cdot q^{14}};$$

$$\left[\begin{array}{l} b_1q^7 = \frac{1}{2} \\ b_1q^7 = -\frac{1}{2} \end{array} \right., \text{ т. е. } \left[\begin{array}{l} b_8 = \frac{1}{2} \\ b_8 = -\frac{1}{2} \end{array} \right. .$$

Ответ: $b_8 = \frac{1}{2}$ или $b_8 = -\frac{1}{2}$.

9. Найдите x , если $\sqrt{x - 5}$; $\sqrt[4]{10x + 4}$; $\sqrt{x + 2} - \dots$

$x = ?$

Так как $b_2^2 = b_1 \cdot b_3$, то $(\sqrt[4]{10x + 4})^2 = \sqrt{x - 5} \cdot \sqrt{x + 2}$;

$D(Y) = [5, \infty)$;

$10x + 4 = (x - 5)(x + 2)$;

$$x^2 - 13x - 14 = 0;$$

$$\begin{cases} x = 14 \\ x = -1 \notin D(Y) \end{cases}$$

Ответ: при $x = 14$ числа $\sqrt{x-5}$; $\sqrt[4]{10x+4}$; $\sqrt{x+2}$ образуют геометрическую прогрессию.

10. $n = 1990$; $b_n - \ddot{\div}$

$$\begin{cases} b_1 + b_3 + b_5 + b_7 + \dots + b_{1989} = 138 \\ b_2 + b_4 + b_6 + \dots + b_{1990} = 69 \end{cases} \quad q = ?$$

$$\begin{cases} b_1(1 + q^2 + q^4 + q^6 + \dots + q^{1988}) = 138 \\ b_1(q + q^3 + q^5 + \dots + q^{1989}) = 69 \end{cases};$$

$$S_k = \frac{b_1(1-q^k)}{1-q};$$

$$\begin{cases} \frac{b_1(1-q^{994})}{1-q^2} = 138 \\ \frac{b_1q(1-q^{994})}{1-q^2} = 69 \end{cases}; \quad \boxed{2} : \boxed{1}$$

$$q = \frac{1}{2}.$$

Ответ: $q = 0,5$.

Практикум 21

Рассмотрим более сложные задачи.

1. При каких a корни уравнения $x^3 + x^2 + a = 0$ образуют арифметическую прогрессию?

Так как $x_1; x_2; x_3$ – корни, то $(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) = 0$,

т.е. $(x - x_1)(x - x_1 - d)(x - x_1 - 2d) = 0$;

$$(x^2 - x(x_1 + x_1 + d) + x_1(x_1 + d))(x - x_1 - 2d) = 0;$$

$$x^3 - x^2(2x_1 + d) + x \cdot x_1(x_1 + d) - x^2(x_1 + 2d) +$$

$$+ x(2x_1 + d)(x_1 + 2d) - x_1(x_1 + d)(x_1 + 2d) = 0;$$

$$x^3 - 3x^2(x_1 + d) + x(3x_1^2 + 6x_1d + 2d^2) - x_1(x_1 + d)(x_1 + 2d) = 0;$$

По теореме Виета для $x^3 + px^2 + kx + c = 0$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -p \\ x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_3 + x_2 \cdot x_3 = k, \text{ для } x^3 + x^2 + a = 0. \\ x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = -c \end{cases}$$

$$\text{Тогда } \begin{cases} 3(x_1 + d) = -1 \\ 3x_1^2 + 6x_1d + 2d^2 = 0 \\ x_1(x_1 + d)(x_1 + 2d) = -a \end{cases};$$

$$\begin{cases} x_1 + d = -\frac{1}{3} \\ (x_1)_{1,2} = \left(-1 \pm \frac{\sqrt{3}}{3}\right)d \quad \text{из второго уравнения} \\ a = -x_1(x_1 + d)(x_1 + 2d) \end{cases}$$

$$\begin{cases} d\left(-1 \pm \frac{\sqrt{3}}{3}\right) + d = -\frac{1}{3} \\ x_1 + d = -\frac{1}{3} \\ a = -x(x_1 + d)(x_1 + 2d) \end{cases}; \quad \begin{cases} d = \mp \frac{\sqrt{3}}{3} \\ x_1 = -\frac{1}{3} \pm \frac{\sqrt{3}}{3} \\ a = -x_1(x_1 + d)(x_1 + 2d) \end{cases}.$$

Пусть $x_1 = -\frac{1}{3} + \frac{\sqrt{3}}{3}$. Тогда $x_2 = -\frac{1}{3}$ и $x_3 = -\frac{1}{3} - \frac{\sqrt{3}}{3}$;

$$a = -\left(-\frac{1}{3} + \frac{\sqrt{3}}{3}\right)\left(-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{1}{3} - \frac{\sqrt{3}}{3}\right), \text{ значит } a = -\frac{2}{27}.$$

Примечание. Если $x_1 = -\frac{1}{3} - \frac{\sqrt{3}}{3}$; $x_2 = -\frac{1}{3}$; $x_3 = -\frac{1}{3} + \frac{\sqrt{3}}{3}$, тогда, очевидно, также $a = -\frac{2}{27}$.

2. Вычислить $\sqrt{\frac{\overbrace{1111111111111111}^{16 \text{ раз}}}{16 \text{ раз}} - \frac{\overbrace{222222222}^{8 \text{ раз}}}{8 \text{ раз}}}$.

Психологически очень пугает. Но если подумать и понять, что

$$\begin{aligned} 1111111111111111 &= 1 + 10 + 10^2 + 10^3 + \dots + 10^{16} = \\ &= \frac{1(1-10^{16})}{1-10} = \frac{10^{16}-1}{9} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{и } 22222222 &= 2(1 + 10 + 10^2 + 10^3 + \dots + 10^8) = \\ &= 2 \cdot \frac{1(1-10^8)}{1-10} = 2 \cdot \frac{10^8-1}{9}, \text{ тогда} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1111111111111111 - 22222222 &= \frac{10^{16}-1}{9} - 2 \cdot \frac{10^8-1}{9} = \\ &= \frac{10^{16}-2 \cdot 10^8+1}{9} = \left(\frac{10^8-1}{3}\right)^2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Следовательно } \sqrt{1111111111111111 - 22222222} &= \frac{10^8-1}{3} = \\ &= \frac{99999999}{3} = 33333333. \end{aligned}$$

3. При каких целых значениях a и b корни уравнения $x^3 + bx^2 + 2bx + a = 0$ образуют геометрическую прогрессию?

Так как $x_1; x_2; x_3$ — корни, то

$$(x - x_1)(x - x_1q)(x - x_1q^2) = 0;$$

$$(x^2 - x \cdot x_1(1+q) + x_1^2q)(x - x_1q^2) = 0;$$

$$x^3 - x^2x_1(1+q) + x \cdot x_1^2q - x^2x_1 \cdot q^2 + x \cdot x_1^2 \cdot q^2(1+q) - x_1^3q^3 = 0.$$

$$\text{По теореме Виета } \begin{cases} x_1(1+q+q^2) = -b \\ x_1^2(1+q+q^2)q = 2b; \quad \boxed{2} : \boxed{1}; \\ x_1^3q^3 = -a \end{cases}$$

$x_1 q = -2 \Rightarrow a = 8$, т.е. $x^3 + bx^2 + 2bx + 8 = 0$;
 $d = \pm 1; \pm 2; \pm 4; \pm 8$; d – делители числа 8.

Проверим и составим таблицу.

x	1	-1	2	-2	4	-4	8	-8
b	-3	7	-2	любое	-3	7	-6,5	10,5

1) $b = -3$; $x^3 - 3x^2 - 6x + 8 = 0$;

$$(x+2)(x^2 - 2x + 4) - 3x(x+2) = 0;$$

$$(x+2)(x^2 - 5x + 4) = 0;$$

$$\begin{cases} x = -2 \\ x = 1 \\ x = 4 \end{cases}, \text{ т.е. } 1; -2; 4 \text{ ---} \begin{cases} b_1 = 1 \\ q = -2 \end{cases},$$

т.е. при $a = 8$ $b = -3$;

2) $b = 7$; $x^3 + 7x^2 + 14x + 8 = 0$;

$$(x+2)(x^2 + 5x + 4) = 0;$$

$$\begin{cases} x = -2 \\ x = -1 \\ x = -4 \end{cases}, \text{ т.е. } -4; -2; -1 \text{ ---} \begin{cases} b_1 = -4 \\ q = \frac{1}{2} \end{cases}, \text{ где}$$

т.е. при $a = 8$ $b = 7$;

3) $b = -2$; $x^3 - 2x^2 - 4x + 8 = 0$;

$$(x+2)(x^2 - 2x + 4) - 2x(x+2) = 0;$$

$$\begin{cases} x = 2 \\ x = -2 \end{cases}; -2; 2; 2 \text{ --- прогрессией не является.}$$

4) Исследуем $x^3 + bx^2 + 2bx + 8 = 0$. Так как $f(-2) = 0$, то

$$\begin{array}{r} x^3 + bx^2 + 2bx + 8 \quad \left| \begin{array}{l} x+2 \\ \hline \end{array} \right. \\ x^3 + 2x^2 \qquad \qquad \qquad x^2 + (b-2)x + 4. \\ \hline \end{array}$$

$$(b-2)x^2 + 2bx$$

$$\underline{(b-2)x^2 + 2(b-2)x}$$

$$4x + 8$$

$$\underline{4x + 8}$$

$$0$$

Тогда $x^2 + (b - 2)x + 4 = 0$

x	1	-1	2	-2	4	-4
b	-3	7	-2	6	-3	7

$$7x = \pm 1; \pm 2; \pm 4.$$

$$b = -3$$

$$b = 7 \quad - \text{уже исследованы.}$$

$$b = -2$$

5) При $b = 6$ $x^3 + 6x^2 + 12x + 8 = 0$, т.е. $(x + 2)^3 = 0$.

$$-2; -2; -2 - \therefore, \text{ где } \begin{cases} b_1 = -2 \\ q = 1 \end{cases}.$$

Ответ: 1) $\begin{cases} a = 8 \\ b = 7 \end{cases} \quad -4; -2; -1, \text{ где } b_1 = -4; q = \frac{1}{2};$

2) $\begin{cases} a = 8 \\ b = -3 \end{cases} \quad 1; -2; 4, \text{ где } b_1 = 1; q = -2;$

3) $\begin{cases} a = 8 \\ b = 6 \end{cases} \quad -2; -2; -2, \text{ где } b_1 = -2; q = 1.$

Проверочная работа 6

1. $a_n - \div$

$$\left\{ \begin{array}{l} a_n = \frac{1}{m} \\ a_m = \frac{1}{n} \end{array} \right. \quad S_{mn} = ?$$

2. $a_n - \div$

$$\left\{ \begin{array}{l} a_1 = -3,5 \\ d = 0,5 \\ S_n = 8,5 \end{array} \right. \quad n = ?$$

3. $a_n - \div \quad a_n \in \mathbb{N}; \quad d \in \mathbb{N}$

$$\left\{ \begin{array}{l} a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 40 \\ a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3} = 104 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} n = ? \\ a_1 = ? \\ d = ? \end{array}$$

4. У отца было пять сыновей, которые рождались с интервалом в 3 года. В первый раз в 5 лет каждый получал 5 книг и через год на одну книгу больше. В сумме они получили 325 книг. Сколько лет было в это время каждому из них?

5. При каких x числа $\sqrt{2x+9}$; $\sqrt{5x}$; $\sqrt{8x+9}$ образуют прогрессию, если $x \in \mathbb{Z}$?

6. $b_n - \div$

$$\left\{ \begin{array}{l} b_1 + b_2 = 8 \\ b_4 + b_5 = 216 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} b_1 = ? \\ q = ? \end{array}$$

7. $b_n - \dots$

$$\left. \begin{array}{l} b_1 = 54 \\ S_3 = 78 \end{array} \right| S_5 = ?$$

8. $b_n - \dots$

$$\left\{ \begin{array}{l} b_4 - b_1 = 52 \\ b_1 + b_2 + b_3 = 26 \end{array} \right. b_6 = ?$$

9. Докажите, что $b_3 \cdot b_5 \cdot b_7 \cdot \dots \cdot b_{2n+1} = b_1^n q^{n^2+n}$, если

$$b_n - \dots$$

10. Из прямоугольника со сторонами 20 и 12 через середины сторон вырезали ромб, а из него через середины сторон уже вырезали прямоугольник и т.д. Вычислить площадь всех таких фигур при десяти таких разрезаниях.

Бесконечно убывающая геометрическая прогрессия

Рассмотрим последовательность $b_1; b_2; b_3; \dots; b_n; \dots$, где $|q| \neq 1$. Такая последовательность называется бесконечной.

При каких q существует $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n$? Попробуем выяснить и доказать, что $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$ (для тех, кто не изучал логарифмы, это доказательство опустить).

Так, для того чтобы $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$, необходимо и достаточно, чтобы для $\forall \varepsilon > 0 \exists N_0 \mid \forall n > N_0 \Rightarrow |q^n| < \varepsilon$.

Так, надо чтобы $|q^n| < \varepsilon$. Прологарифмируем обе части равенства по основанию 10:

$$\lg |q|^n < \lg \varepsilon; \quad n \cdot \lg |q| < \lg \varepsilon.$$

1. Если $|q| > 1$, то $\lg |q| > 0$, тогда $n < \frac{\lg \varepsilon}{\lg |q|}$ и $n < N_0 = \left[\frac{\lg \varepsilon}{\lg |q|} \right]$ и тогда нет $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n$, так как необходимо $n > N_0$, а не наоборот.
2. Если $|q| < 1$, то $\lg |q| < 0$, тогда $n > \frac{\lg \varepsilon}{\lg |q|}$ и отсюда следует, что для $\forall \varepsilon > 0 \exists N_0 \left(N_0 = \left[\frac{\lg \varepsilon}{\lg |q|} \right] \right) \mid \forall n > N_0 \Rightarrow |q^n| - 0 < 0$, т.е. $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$ (при $|q| < 1$).

Теорема 8. Докажем, что сумма членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии существует и равна

$$S = \frac{b_1}{1-q} \quad (|q| < 1).$$

Доказательство.

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_1(1-q^n)}{1-q} = \frac{b_1}{1-q} \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - q^n) = \frac{b_1}{1-q} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} q^n \right) = \frac{b_1}{1-q} (1 - 0) = \frac{b_1}{1-q}, \text{ т.е. } \boxed{S = \frac{b_1}{1-q}}.$$

Примечание. b_1, q – постоянные, и поэтому $\frac{b_1}{1-q}$ можно вынести за знак переменной.

Практикум 22

1. Вычислите.

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots$$

Так как $b_1 = 1$, $q = \frac{1}{2}$, т.е. $|q| < 1$, то $S = \frac{b_1}{1-q}$.

$$S = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2.$$

2. Обратить в обыкновенную дробь $0,(3)$.

$$0,(3) = 0,33333\dots = 0 + \frac{3}{10} + \frac{3}{10^2} + \frac{3}{10^3} + \dots + \frac{3}{10^n} + \dots$$

$$\left\{ \begin{array}{l} b_1 = \frac{3}{10} \\ q = \frac{1}{10} \end{array} \right. \text{ Тогда } S = \frac{\frac{3}{10}}{1-\frac{1}{10}} = \frac{\frac{3}{10}}{\frac{9}{10}} = \frac{1}{3}. \text{ Итак, } 0,(3) = \frac{1}{3}.$$

3. Вычислите $\sqrt{3} + \frac{3}{\sqrt{3}+1} + \frac{3\sqrt{3}}{(\sqrt{3}+1)^2} + \dots$,

$$\text{где } b_1 = \sqrt{3}; \quad b_2 = \frac{3}{\sqrt{3}+1}; \quad q = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1};$$

$$S = \frac{\sqrt{3}}{1-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1}} = \frac{\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}+1-\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1}} = \sqrt{3}(\sqrt{3}+1) = 3 + \sqrt{3}.$$

4. Решите уравнение.

$$2 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots = 3 \quad (|x| < 1),$$

$$\text{где } 1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots = 2.$$

$$S = \frac{b_1}{1-q}; \quad b_1 = 1, \quad \text{т.е. } 2 = \frac{1}{1-x}; \quad 1-x = \frac{1}{2}; \quad x = \frac{1}{2}.$$

5. Вычислите, если сумма ряда существует:

$$S = \frac{7}{3} - \frac{7}{3^2} + \frac{7}{3^3} - \frac{7}{3^4} + \dots + (-1)^{n+1} \cdot \frac{7}{3^n} + \dots,$$

$$\text{тогда } \begin{array}{l} b_1 = \frac{7}{3} \\ q = -\frac{1}{3} \end{array}; \quad S = \frac{b_1}{1-q}; \quad S = \frac{\frac{7}{3}}{1+\frac{1}{3}} = \frac{7}{4} = 1,75.$$

6. Сумма ряда существует. Вычислим ее.

$$S = \frac{48}{5} + \frac{72}{5^2} + \frac{48}{5^3} + \frac{72}{5^4} + \dots;$$

$$S_1 = \frac{48}{5} + \frac{48}{5^3} + \frac{48}{5^5} + \dots;$$

$$S_1 = \frac{\frac{48}{5}}{1 - \frac{1}{5^2}} = \frac{48 \cdot 5}{24} = 10;$$

$$S_2 = \frac{72}{5^2} + \frac{72}{5^4} + \frac{72}{5^6} + \dots;$$

$$S_2 = \frac{\frac{72}{5^2}}{1 - \frac{1}{5^2}} = \frac{72}{24} = 3; \quad S = S_1 + S_2 = 13.$$

7. $b_n - \dots$ — бесконечно убывающая геометрическая прогрессия.

$$\left\{ \begin{array}{l} b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_n + \dots = 56 \\ b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + \dots + b_n^2 + \dots = 448 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} b_1 = ? \\ q = ? \end{array}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} b_1 + b_1q + b_1q^2 + \dots + b_1q^{n-1} + \dots = 56 \\ b_1^2 + b_1^2q^2 + b_1^2q^4 + \dots + b_1^2q^{2(n-1)} + \dots = 448 \end{array} \right.;$$

$$\left\{ \begin{array}{l} b_1(1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1} + \dots) = 56 \\ b_1^2(1 + q^2 + q^4 + \dots + q^{2(n-1)} + \dots) = 448 \end{array} \right.;$$

$$\left\{ \begin{array}{l} b_1 \cdot \frac{1}{1-q} = 56 \\ b_1^2 \cdot \frac{1}{1-q^2} = 448 \end{array} \right. \quad \boxed{1} : \boxed{2}; \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{b_1}(1+q) = \frac{1}{8} \\ b_1 \cdot \frac{1}{1-q} = 56 \end{array} \right. \quad \boxed{1} \cdot \boxed{2};$$

$$\frac{1+q}{1-q} = 7; \quad \left\{ \begin{array}{l} q = \frac{3}{4} \\ b_1 \cdot \frac{1}{1-\frac{3}{4}} = 56 \end{array} \right.; \quad \left\{ \begin{array}{l} q = \frac{3}{4} \\ b_1 = 14 \end{array} \right.;$$

т.е. $14; \frac{21}{2}; \frac{63}{8}; \dots$

Практикум 23

Рассмотрим более сложные примеры на геометрические прогрессии.

$$1. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} + \frac{4}{3^4} + \dots + \frac{n}{3^n} \right).$$

$$\text{Пусть } (S_1)_n = \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{3^n},$$

$$\text{тогда } \lim_{n \rightarrow \infty} (S_1)_n = \frac{\frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{1}{2} = S_1;$$

$$(S_2)_n = \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{3^n};$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (S_2)_n = \frac{\frac{1}{3^2}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = S_2;$$

$$(S_3)_n = \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^4} + \dots + \frac{1}{3^n};$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (S_3)_n = \frac{\frac{1}{3^3}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3^2} = S_3 \text{ и так далее;}$$

$$(S_k)_n = \frac{1}{3^k} + \frac{1}{3^{k+1}} + \dots + \frac{1}{3^n};$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (S_k)_n = \frac{\frac{1}{3^k}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3^{k-1}} = S_k.$$

Итак,

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{2}{3^3} + \frac{4}{3^4} + \dots + \frac{n}{3^n} \right) = \\ & = \lim_{n \rightarrow \infty} (S_1 + S_2 + S_3 + \dots + S_k + S_n) = \\ & \lim_{n \rightarrow \infty} = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3^{n-1}} \right) = \\ & = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{3}{4} = 0,75. \end{aligned}$$

$$2. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{4}{2^2} + \frac{9}{2^3} + \frac{16}{2^4} + \dots + \frac{n^2}{2^n} \right).$$

$$\text{Пусть } (S_1)_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \dots + \frac{1}{2^n}.$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (S_1)_n = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = 1 = S_1;$$

$$(S_2)_n = 3 \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \dots + \frac{1}{2^n} \right);$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (S_2)_n = 3 \cdot \frac{\frac{1}{2^2}}{1 - \frac{1}{2}} = 3 \cdot \frac{1}{2} = S_2;$$

$$(S_3)_n = 5 \left(\frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \dots + \frac{1}{2^n} \right);$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (S_3)_n = 5 \cdot \frac{\frac{1}{2^3}}{1 - \frac{1}{2}} = 5 \cdot \frac{1}{2^2} = S_3;$$

$$(S_4)_n = 7 \left(\frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^5} + \dots + \frac{1}{2^n} \right);$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (S_4)_n = 7 \cdot \frac{\frac{1}{2^4}}{1 - \frac{1}{2}} = 7 \cdot \frac{1}{2^3} = S_4;$$

$$\begin{aligned} \text{Итак, } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \dots + \frac{n^2}{2^n} \right) &= \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (S_1 + S_2 + S_3 + \dots + S_k + S_n) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{2} + \frac{5}{2^2} + \frac{7}{2^3} + \dots + \frac{2n-1}{2^{n-1}} \right). \end{aligned}$$

$$\text{Пусть } (S_1^1)_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}};$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (S_1^1)_n = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2 = S_1^1;$$

$$(S_2^1)_n = 2 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} \right);$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (S_2^1)_n = 2 \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2 = S_2^1;$$

$$(S_3^1)_n = 2 \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} \right);$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (S_3^1)_n = 2 \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 1 = S_3^1;$$

$$(S_4^1)_n = 2 \left(\frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} \right);$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (S_4^1)_n = 2 \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{2} = S_4^1;$$

.....

$$(S_k^1)_n = 2 \left(\frac{1}{2^{k-1}} + \frac{1}{2^k} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} \right);$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (S_k^1)_n = 2 \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{2^{k-3}} = S_k^1.$$

$$\text{Итак, } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{2} + \frac{5}{2^2} + \frac{7}{2^3} + \dots + \frac{2n-1}{2^{n-1}} \right) =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} (S_1^1 + S_2^1 + S_3^1 + S_4^1 + \dots + S_n^1) =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(2 + 2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} \right) =$$

$$= 4 + \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 4 + 2 = 6.$$

Тренировочная работа 15

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+2+3+\dots+n}{5n^2} =$

2. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2+4+6+\dots+2n}{1+3+5+\dots+2n-1} =$

3. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+1}}{2^n - 3} =$

4. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+2+2^2+2^3+\dots+2^n}{1+5+5^2+5^3+\dots+5^n} =$

5. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{3} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{3\sqrt{3}} + \dots + \frac{\sqrt{3}}{3^{n-1}} \right) =$

6. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{7}{10} + \frac{29}{100} + \dots + \frac{5^n + 2^n}{10^n} \right) =$

7. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1^2}{n^3} + \frac{2^2}{n^3} + \frac{3^2}{n^3} + \dots + \frac{(n-1)^2}{n^3} + \frac{1}{n} \right) =$

8. $2,3(45) =$

9. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{3 \cdot 6} + \frac{1}{6 \cdot 9} + \frac{1}{9 \cdot 12} + \dots \right) =$

10. В круг вписан правильный треугольник, а в него вписан круг и так далее до бесконечности. Вычислить площадь всех таких фигур.

11. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{4} - \frac{3}{4^2} + \frac{5}{4^3} - \frac{7}{4^4} + \dots + (-1)^{n+1} \cdot \frac{2n-1}{4^n} + \dots \right) =$

12. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{4} - \frac{4}{4^2} + \frac{9}{4^3} - \frac{16}{4^4} + \dots + (-1)^{n+1} \cdot \frac{n^2}{4^n} + \dots \right) =$

Решение тренировочной работы 15

$$1. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+2+3+\dots+n}{5n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1+n}{2} \cdot n}{5n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{10n} = 0,1.$$

$$2. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2+4+6+\dots+2n}{1+3+5+\dots+2n-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n+1)}{\frac{1+2n-1}{2} \cdot n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = 1.$$

$$3. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+1}}{2^n - 3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n \cdot 2}{2^n \left(1 - \frac{3}{2^n}\right)} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} 2}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{3}{2^n}\right)} = \frac{2}{1-0} = 2.$$

$$\begin{aligned} 4. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+2+2^2+2^3+\dots+2^n}{1+5+5^2+5^3+\dots+5^n} &= \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1(1-2^{n+1})}{1-2} \cdot \frac{1(1-5^{n+1})}{1-5} = \\ &= 4 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n - 1}{5^n - 1} = 4 \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(\frac{2}{5}\right)^n \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{5^n}} \right] = \\ &= 4 \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{5}\right)^n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{5^n}}\right) = \\ &= 4 \cdot 0 \cdot \frac{1-0}{1-0} = 0. \end{aligned}$$

$$5. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{3} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{3\sqrt{3}} + \dots + \frac{\sqrt{3}}{3^{n-1}} \right) = ,$$

$$\begin{cases} b_1 = \sqrt{3} \\ q = \frac{1}{3} \end{cases} .$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{3} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{3\sqrt{3}} + \dots + \frac{\sqrt{3}}{3^{n-1}} \right) = \frac{\sqrt{3}}{1 - \frac{1}{3}} = 1,5\sqrt{3}.$$

$$6. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{7}{10} + \frac{29}{100} + \dots + \frac{5^n + 2^n}{10^n} \right).$$

Заметим, что

$$\frac{7}{10} = \frac{1}{2} + \frac{1}{5};$$

$$\frac{29}{100} = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{5^2};$$

.....

$$\frac{5^n + 2^n}{10^n} = \frac{1}{2^n} + \frac{1}{5^n};$$

Пусть $S'_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^n}$, тогда

$$S''_n = \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{5^3} + \dots + \frac{1}{5^n}; \quad S_n = S'_n + S''_n;$$

$$S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{5^3} + \dots + \frac{1}{5^n}.$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{7}{10} + \frac{29}{100} + \dots + \frac{5^n + 2^n}{10^n} \right) =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} (S'_n + S''_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} S'_n + \lim_{n \rightarrow \infty} S''_n =$$

$$= \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} + \frac{\frac{1}{5}}{1 - \frac{1}{5}} = 1 + \frac{1}{4} = 1,25.$$

$$7. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1^2}{n^3} + \frac{2^2}{n^3} + \frac{3^2}{n^3} + \dots + \frac{(n-1)^2}{n^3} + \frac{1}{n} \right) =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{n^3} (1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2) \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^3} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} =$$

(Так как $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ – тождество Архимеда.)

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(2 + \frac{1}{n}\right)}{6 \cdot n^2} = \frac{1}{3}.$$

$$\begin{aligned}
 8. \quad 2,3(45) &= 2,3 + \frac{45}{10^3} + \frac{45}{10^5} + \frac{45}{10^7} + \dots = \\
 &= 2,3 + \frac{45}{10^3} = 2,3 + \frac{45}{99 \cdot 10} = \\
 &= 2 \frac{3}{10} + \frac{1}{22} = 2 \frac{3 \cdot 22 + 10}{220} = 2 \frac{19}{55}.
 \end{aligned}$$

$$9. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{3 \cdot 6} + \frac{1}{6 \cdot 9} + \frac{1}{9 \cdot 12} + \dots \right)$$

Выясним n -й член последовательности 3; 6; 9; 12 ...,

$$\text{где } \left. \begin{array}{l} a_1 = 3 \\ d = 3 \end{array} \right| a_n = a_1 + (n-1)d, \text{ т.е. } a_n = 3 + (n-1)3 = 3n.$$

Тогда $a_{n+1} = 3(n+1)$, т.е. n -й член равен $\frac{1}{3n \cdot 3(n+1)}$.

Представим себе каждый член последовательности в виде алгебраической разности

$$\frac{1}{3 \cdot 6} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6} \right);$$

$$\frac{1}{6 \cdot 9} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{9} \right);$$

$$\frac{1}{9 \cdot 12} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{12} \right);$$

.....

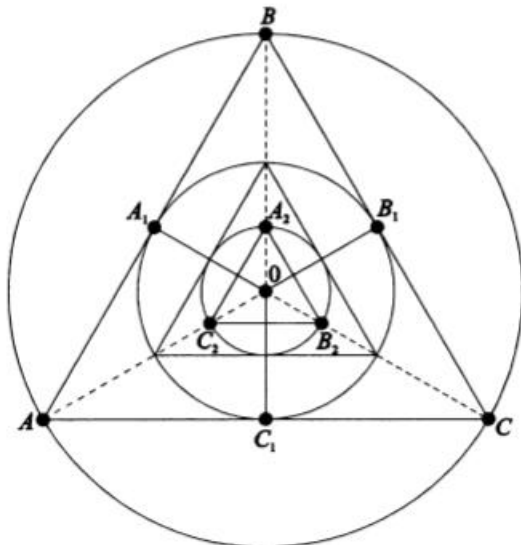
$$\frac{1}{3n \cdot 3(n+1)} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3n} - \frac{1}{3(n+1)} \right).$$

Суммируя, убеждаемся, что в правой части каждое второе слагаемое предыдущей строчки взаимно уничтожается с первым слагаемым в последующей строчке. Остается первое слагаемое из первой строчки и второе слагаемое последней строчки.

$$\frac{1}{3 \cdot 6} + \frac{1}{6 \cdot 9} + \frac{1}{9 \cdot 12} + \dots + \frac{1}{3n \cdot 3(n+1)} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3(n+1)} \right),$$

$$\text{т.е. } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{3 \cdot 6} + \frac{1}{6 \cdot 9} + \frac{1}{9 \cdot 12} + \dots + \frac{1}{3n \cdot 3(n+1)} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{9(n+1)} = \frac{1}{9}.$$

10. В круг вписан правильный треугольник, а в него вписан круг и так далее до бесконечности. Вычислить площадь всех таких фигур.



Пусть R – радиус круга $S_1 = \pi R^2$;

$$AB = 2R \cdot \sin 60^\circ = R\sqrt{3}; \quad S'_1 = \frac{1}{2}(R\sqrt{3})^2 \cdot \sin 60^\circ = \frac{3}{4}R^2\sqrt{3};$$

$$R_1 = R \cdot \sin 30^\circ = \frac{R}{2}; \quad S_2 = \frac{1}{4}\pi R^2;$$

$$A_1B_1 = 2R_1 \cdot \sin 60^\circ = R_1\sqrt{3} = \frac{R}{2}\sqrt{3};$$

$$S'_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{R}{2}\sqrt{3}\right)^2 \sin 60^\circ = \frac{3}{16}R^2\sqrt{3} \text{ и т. д.}$$

$$S_1 + S_2 + S_3 + \dots + S_n = \pi R^2 + \frac{1}{4}\pi R^2 + \frac{1}{16}\pi R^2 + \dots + \frac{1}{4^{n-1}}\pi R^2;$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\pi R^2 \left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{4^{n-1}} \right) \right) = \pi R^2 \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{4}{3}\pi R^2;$$

$$S'_1 + S'_2 + S'_3 + \dots + S'_n = \frac{3}{4}R^2\sqrt{3} + \frac{3}{16}R^2\sqrt{3} + \dots + \frac{1}{4^{n-1}} \cdot \frac{3}{4}R^2\sqrt{3};$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{4} R^2 \sqrt{3} \left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{4^{n-1}} \right) = \frac{3}{4} R^2 \sqrt{3} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} = R^2 \sqrt{3};$$

$$S = \frac{4}{3} \pi R^2 + R^2 \sqrt{3} = \frac{R^2(4\pi + 3\sqrt{3})}{3}.$$

$$11. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{4} - \frac{3}{4^2} + \frac{5}{4^3} - \frac{7}{4^4} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{2n-1}{4^n} + \dots \right).$$

$$\text{Пусть } (S_1)_n = \frac{1}{4} - \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} - \frac{1}{4^4} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{1}{4^n};$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (S_1)_n = \frac{\frac{1}{4}}{1 + \frac{1}{4}} = \frac{1}{5} = S_1;$$

$$(S_2)_n = 2 \left(-\frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} - \frac{1}{4^4} + \dots + (-1)^n \frac{1}{4^n} \right);$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (S_2)_n = 2 \cdot \frac{-\frac{1}{4^2}}{1 + \frac{1}{4}} = \frac{1}{5} \cdot \left(-\frac{1}{2} \right) = \frac{2}{5} \cdot \left(-\frac{1}{4} \right) = S_2;$$

$$(S_3)_n = 2 \left(\frac{1}{4^3} - \frac{1}{4^4} + \frac{1}{4^5} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{4^n} \right);$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (S_3)_n = 2 \cdot \frac{\frac{1}{4^3}}{1 + \frac{1}{4}} = \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^3 = \frac{2}{5} \left(\frac{1}{4} \right)^2 = S_3;$$

$$(S_4)_n = 2 \left(-\frac{1}{4^4} + \frac{1}{4^5} - \frac{1}{4^6} + \dots + (-1)^{n-2} \frac{1}{4^n} \right);$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (S_4)_n = 2 \cdot \frac{-\frac{1}{4^4}}{1 + \frac{1}{4}} = \frac{2}{5} \cdot \left(-\frac{1}{4} \right)^3 = S_4;$$

$$\text{Итак, } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{4} - \frac{3}{4^2} + \frac{5}{4^3} - \frac{7}{4^4} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{2n-1}{4^n} + \dots \right) =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} (S_1 + S_2 + S_3 + \dots + S_n) =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{5} + \frac{2}{5} \left(-\frac{1}{4} \right) + \frac{2}{5} \left(-\frac{1}{4} \right)^2 + \frac{2}{5} \left(-\frac{1}{4} \right)^3 + \dots + \frac{2}{5} \left(-\frac{1}{4} \right)^n \right) =$$

$$= \frac{1}{5} + \frac{\frac{2}{5} \left(-\frac{1}{4} \right)}{1 + \frac{1}{4}} = \frac{1}{5} - \frac{2}{25} = \frac{3}{25} = 0,12.$$

$$12. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{4} - \frac{4}{4^2} + \frac{9}{4^3} - \frac{16}{4^4} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{n^2}{4^n} \right).$$

$$\text{Пусть } (S_1)_n = \frac{1}{4} - \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} - \frac{1}{4^4} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{1}{4^n};$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (S_1)_n = \frac{\frac{1}{4}}{1 + \frac{1}{4}} = \frac{1}{5} = S_1;$$

$$(S_2)_n = 3 \left(-\frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} - \frac{1}{4^4} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{1}{4^n} \right);$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (S_2)_n = 3 \cdot \frac{\frac{1}{4^2}}{1 + \frac{1}{4}} = \frac{3}{5} \cdot \left(-\frac{1}{4} \right) = S_2;$$

$$(S_3)_n = 5 \left(\frac{1}{4^3} - \frac{1}{4^4} + \frac{1}{4^5} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{1}{4^n} \right);$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (S_3)_n = 5 \cdot \frac{\frac{1}{4^3}}{1 + \frac{1}{4}} = \frac{5}{5} \cdot \left(-\frac{1}{4} \right)^2 = S_3;$$

$$(S_4)_n = 7 \left(-\frac{1}{4^4} + \frac{1}{4^5} + \dots + (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{4^n} \right);$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (S_4)_n = 7 \cdot \frac{\frac{1}{4^4}}{1 + \frac{1}{4}} = \frac{7}{5} \cdot \left(-\frac{1}{4} \right)^3 = S_4;$$

$$\text{Итак, } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{4} - \frac{4}{4^2} + \frac{9}{4^3} - \frac{16}{4^4} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{n^2}{4^n} \right) =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} (S_1 + S_2 + S_3 + \dots + S_n) =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{5} + \frac{3}{5} \left(-\frac{1}{4} \right) + \frac{5}{5} \left(-\frac{1}{4} \right)^2 + \frac{7}{5} \left(-\frac{1}{4} \right)^3 + \dots + (-1)^{n+1} \frac{2n-1}{5} \left(\frac{1}{4} \right)^{n-1} \right).$$

Пусть

$$(S'_1)_n = \frac{1}{5} - \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{1}{4} \right)^2 - \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{1}{4} \right)^3 + \dots + (-1)^{n-1} \left(\frac{1}{4} \right)^{n-1};$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (S'_1)_n = \frac{\frac{1}{5}}{1 + \frac{1}{4}} = \frac{4}{25} = S'_1;$$

$$(S'_2)_n = 2\left(\frac{1}{5}\left(-\frac{1}{4}\right) + \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 - \frac{1}{5}\left(\frac{1}{4}\right)^3 + \dots + (-1)^n \left(\frac{1}{4}\right)^n\right);$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (S'_2)_n = 2 \cdot \frac{\frac{1}{5}\left(-\frac{1}{4}\right)}{1 + \frac{1}{4}} = -\frac{2}{25} = S'_2;$$

$$(S'_3)_n = 2\left(\frac{1}{5} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 - \frac{1}{5}\left(\frac{1}{4}\right)^3 + \dots + (-1)^{n+1} \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right);$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (S'_3)_n = 2 \cdot \frac{\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{4^2}}{1 + \frac{1}{4}} = \frac{2}{25} \cdot \left(\frac{1}{4}\right) = S'_3;$$

$$(S'_4)_n = 2 \cdot \left(-\frac{1}{5}\left(\frac{1}{4}\right)^3 + \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^4 + \dots + (-1)^{n+2} \left(\frac{1}{4}\right)^{n+2}\right);$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (S'_4)_n = 2 \cdot \frac{-\frac{1}{5}\left(\frac{1}{4}\right)^3}{1 + \frac{1}{4}} = -\frac{2}{25} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 = S'_4,$$

$$\text{т. е. } \lim_{n \rightarrow \infty} (S'_1 + S'_2 + S'_3 + \dots + S'_n) =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4}{25} - \frac{2}{25} + \frac{2}{25} \cdot \left(\frac{1}{4}\right) - \frac{2}{25} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \frac{2}{25} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^3 + \dots + (-1)^{n+3} \left(\frac{1}{4}\right)^{n+3}\right) =$$

$$= \frac{4}{25} + \frac{-\frac{2}{25}}{1 + \frac{1}{4}} = \frac{4}{25} - \frac{8}{125} = \frac{12}{125} = 0,096.$$

5

Зачетные карточки

Зачетная карточка 1

1. $a_n - \div$

$$\left. \begin{array}{l} a_3 + a_5 = 14 \\ S_{12} = 129 \\ S_n = 195 \end{array} \right| n = ?$$

2. Решите уравнение

$$1 - 5 - 11 - \dots - x = -207.$$

3. $b_n - \div\div$

$$\left. \begin{array}{l} S_2 = 4 \\ S_3 = 13 \end{array} \right| S_5 = ?$$

4. $a_1; a_2; a_3 - \div$

$$\left. \begin{array}{l} a_1; (a_2 - 1); (a_3 + 1) - \div\div \\ a_1 + a_2 + a_3 = 21 \end{array} \right| \begin{array}{l} a_1 = ? \\ a_2 = ? \\ a_3 = ? \end{array}$$

5. $a_n = -2n^3 + 15n^2$.

Найдите наибольший член последовательности.

6. $x(x^4 - 2(a + 2)x^2 + a^2) = 0$.

При каких a уравнение имеет пять корней, образующих арифметическую прогрессию?

Найти корни.

7. $b_n - \ddots$

$$\begin{cases} b_1 + b_2 + b_3 = 14 \\ b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 = 84 \end{cases} \quad \begin{matrix} b_1 = ? \\ q = ? \end{matrix}$$

8. $x^3 + 3x^2 - 6x + a = 0$.

Решите уравнение, если корни образуют геометрическую прогрессию. При каких a это возможно?

9. Вычислите.

$$\sqrt{\frac{\underbrace{4444444444}_{10 \text{ раз}}}{10} - \frac{\underbrace{888888}_{5 \text{ раз}}}{5}} =$$

10. $b_n - \ddots$

$$\begin{cases} b_1 - b_5 = 1,92 \\ b_1 + b_3 = 2,4 \end{cases} \quad |q| < 1$$

S – сумма данной бесконечно убывающей геометрической прогрессии.

Вычислите $\frac{S^2}{b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2}$.

Зачетная карточка 2

1. $a_n - \div$

$$\left. \begin{array}{l} S_n - a_2 = 103 \\ S_n - a_n = 88 \\ S_n - a_n - a_{n-1} = 87\frac{1}{2} \end{array} \right| n = ?$$

2. Решите уравнение

$$x - 1 + x - 3 + \dots + x - 27 = 70.$$

3. $b_n - \div\div$

$$\left\{ \begin{array}{l} b_1 + b_4 = 11\frac{2}{3} \\ b_2 + b_3 = 10 \end{array} \right. S_5 = ?$$

4. $b_1; b_2; b_3 - \div\div$

$$\left. \begin{array}{l} (b_3 - 4); b_2; b_1 - \div \\ b_1 + b_2 + b_3 = 28 \end{array} \right| \begin{array}{l} b_1 = ? \\ b_2 = ? \\ b_3 = ? \end{array}$$

5. $a_n = -n^3 + 8n^2$.

Найдите наибольший член последовательности.

6. $x^4 + (a - 3)x^2 + (a + 10)^2 = 0$

При каких a уравнение имеет четыре корня, образующие арифметическую прогрессию?

Найти эти корни.

7. $b_n - \div\div$

$$\left\{ \begin{array}{l} b_1 + b_2 + b_3 = 21 \\ b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 = 189 \end{array} \right. \begin{array}{l} b_1 = ? \\ q = ? \end{array}$$

8. $x^3 - 3x^2 - 6x - b = 0$.

Решите уравнение, если корни образуют геометрическую прогрессию.

При каких b это возможно?

9. Вычислите.

$$\sqrt{9999999999 - 2 \cdot 99999} = ?$$

10. $b_n - \dots$; $n \rightarrow \infty$; $|q| < 1$;

$S = 9$ (сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии)

$$\underline{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + \dots = 40,5} \quad b_1^3 + b_2^3 + b_3^3 + \dots = ?$$

Зачетная карточка 3

1. $a_n - \ddot{\vdots}$

$$\left. \begin{array}{l} S_3 = 6 \\ a_1 + a_3 + a_5 = 10,5 \end{array} \right| \begin{array}{l} d = ? \\ a_1 = ? \end{array}$$

2. $x^2 - 4x + a = 0$, где $x_1; x_2$ - корни;

$x^2 - 36x + b = 0$, где $x_3; x_4$ - корни;

$x_1; x_2; x_3; x_4 - \ddot{\vdots}$

$a = ?$

$b = ?$

3. Найти сумму всех двузначных чисел, которые не делятся ни на три, ни на четыре.

4. Решите уравнение

$$\frac{2x}{2x+1} + \frac{2x-1}{2x+1} + \frac{2x-2}{2x+1} + \dots + \frac{1}{2x+1} = 3.$$

5. $b_n - \ddot{\vdots}$

$$\left. \begin{array}{l} n = 52 \\ S_1 = b_1 + b_3 + b_5 + \dots + b_{51} = 28 \\ S_2 = b_2 + b_4 + \dots + b_{52} = 7 \end{array} \right| q = ?$$

6. $5^{5x}; 10^{\frac{3x^2+3}{4}}; 32^x - \ddot{\vdots}$
 $x = ?$

7. $1 + 11 + 111 + \dots$

$S_n = ?$

8. Решите уравнение

$$x^2 + 3x^3 + 9x^4 + 27x^5 + \dots = 1 - 3x,$$

полагая, что левая часть – сумма бесконечно убывающей прогрессии.

9. $x_n = \frac{3n-2}{6n+3}$.

Выясните:

1. Монотонность.
2. Ограниченность.
3. Докажите существование предела x_n по определению.

10. Вычислите

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2}{(n+1)(n-3)(n+4)}.$$

Зачетная карточка 4

1. $a_n - \div$

$$\left. \begin{array}{l} a_2 + a_4 + a_6 = 36 \\ a_2 \cdot a_3 = 54 \end{array} \right\} \begin{array}{l} a_1 = ? \\ d = ? \end{array}$$

2. $x^2 - 6x + a = 0$, где $x_1; x_2$ - корни

$x^2 - 24x + b = 0$, где $x_3; x_4$ - корни

$$\left. \begin{array}{l} x_1; x_2; x_3; x_4 - \dots \\ \dots \end{array} \right\} \begin{array}{l} a = ? \\ b = ? \end{array}$$

3. Найти сумму всех двузначных чисел, которые делятся хотя бы на шесть или на семь.

4. Решить уравнение

$$\frac{2x-1}{2x} + \frac{2x-2}{2x} + \frac{2x-3}{2x} + \dots + \frac{1}{2x} = 3.$$

5. $9 + 99 + 999 + \dots + \dots = S_{100} \mid S_{100} = ?$

6. $b_n - \dots$

$$\left\{ \begin{array}{l} b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 = 84 \\ b_1 + b_2 + b_3 = 14 \end{array} \right. \begin{array}{l} b_1 = ? \\ q = ? \end{array}$$

7. $a; b; c - \dots$

$$\left. \begin{array}{l} (a-1); b; (c-1) - \dots \\ (a-1); (b-2); (c-4) - \dots \end{array} \right\} \begin{array}{l} a = ? \\ b = ? \\ c = ? \end{array}$$

8. Решите уравнение

$$x^2 - 2x^3 + 4x^4 - 8x^5 + \dots = 2x + 1.$$

$$9. x_n = \frac{4n+2}{8n-3}.$$

Выясните

1. Монотонность;
2. Ограниченность;
3. Докажите существование предела x_n по определению.

10. Вычислите

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2^2+4^2+6^2+8^2+\dots)^2}{(2+4+6+8+\dots)^3}.$$

Зачетная карточка 5

1. Решите уравнение $3 + 7 + 11 + \dots + x = 136$.

2. $b_n - \dots$

$$\left. \begin{array}{l} b_1 + b_2 + b_3 = 7 \\ b_1; b_2; (b_3 - 1) \dots \\ S_n = 255 \end{array} \right\} n = ?$$

3. $a; b; c - \dots$

$$\left. \begin{array}{l} a; b; c \in \mathbb{N} \\ a; b; c - \text{стороны треугольника} \\ a \cdot b \cdot c = 216 \end{array} \right\} \begin{array}{l} a = ? \\ b = ? \\ c = ? \end{array}$$

4. Решите уравнение

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30} + \dots + \frac{1}{342} = \frac{1}{342}(1 + 3 + 5 + \dots + 2n - 1)$$

5. Найти сумму всех двузначных чисел, не делящихся ни на 3, ни на 5.

6. Даны четыре числа $a; b; c; p$.

$$\left. \begin{array}{l} p; k; t - \dots \\ k; t; m - \dots \\ p + k + t = 12 \\ k + t + m = 19 \end{array} \right\} \begin{array}{l} p = ? \\ k = ? \\ t = ? \\ m = ? \end{array}$$

7. Вычислите

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n(n+1)} - n).$$

8. Вычислите

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[8]{2} \dots \sqrt[2^n]{2}).$$

9. $a_n = \dots$

$$a_1 = 25 \quad \left| \quad \frac{1}{\sqrt{a_1 + \sqrt{a_2}}} + \frac{1}{\sqrt{a_2 + \sqrt{a_3}}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{a_{100} + \sqrt{a_{101}}}} = 1 \quad d = ? \right.$$

10. Вычислите

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots}}}$$

(n – корней).

Зачетная карточка 6

1. Решите уравнение

$$(x^3 + 1) + (2x^3 + 3) + (3x^3 + 5) + \dots + (10x^3 + 19) = 45.$$

2. $a_n - \div$

$$\left. \begin{array}{l} S_3 = 54 \\ a_1; a_2 = 9; a_3 = 6 - \div \div \end{array} \right\} \begin{array}{l} a_1 = ? \\ d = ? \end{array}$$

3. $a; b; c - \div$

$$\left. \begin{array}{l} a; b; c \in \mathbb{N} \\ a; b; c - \text{стороны треугольника} \\ a + b + c = 15 \end{array} \right\} \begin{array}{l} a = ? \\ b = ? \\ c = ? \end{array}$$

4. Решить уравнение

$$\frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \dots + \frac{1}{n^2 + 3n + 2} = \frac{11}{24}.$$

5. Найти сумму всех двузначных чисел, не делящихся ни на 3, ни на 4.

6. Даны четыре числа $p; k; t; m$.

$$\left. \begin{array}{l} p; k; t - \div \\ k; t; m - \div \div \\ p + k + t = 12 \\ k + t + m = 19 \end{array} \right\} \begin{array}{l} p = ? \\ k = ? \\ t = ? \\ m = ? \end{array}$$

7. Вычислите

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + n - 1} - \sqrt{n^2 - n + 1}).$$

8. Вычислите

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt[3]{n^3 + 2n^2 - 1} - \sqrt[3]{n^3 + 3n - 1} \right).$$

9. $b_n - \ddots$

$$\left. \begin{array}{l} S_{10} = 20 \\ S'_{10} = \frac{1}{b_1} + \frac{1}{b_2} + \dots + \frac{1}{b_{10}} = 10 \end{array} \right| b_1 \cdot b_2 \cdot b_3 \cdot \dots \cdot b_{10} = ?$$

10. $a_n - \ddots$; $a_n \neq 0$.

Вычислите

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{a_1 \cdot a_2} + \frac{1}{a_2 \cdot a_3} + \dots + \frac{1}{a_n \cdot a_{n+1}} \right).$$

6

Решения

Решение проверочной работы 1

$$A = \{1; 3; 4; 6; 10\};$$

$$B = \{2; 4; 5; 6; 9; 11\};$$

$$C = \{2; 4; 6; 7; 9; 10\}.$$

Найти:

1. $A \cap B = \{4; 6\}.$

2. $A \cup B = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 9; 10; 11\}.$

3. $A \cup (B \cap C) = A \cup \{2; 4; 6; 9\} = \{1; 2; 3; 4; 6; 9; 10\}.$

4. $(A \cup B) \cap C = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 9; 10; 11\} \cap C =$
 $= \{2; 4; 6; 9; 10\}.$

5. $A \cap (B \cup C) = A \cap \{2; 4; 5; 6; 7; 9; 10; 11\} = \{4; 6; 10\}.$

6. $(A \cap B) \cup C = \{4; 6\} \cup \{2; 4; 6; 7; 9; 10\} =$
 $= \{2; 4; 6; 7; 9; 10\}.$

7. $(A \cup B) \cap (B \cup C) =$
 $= \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 9; 10; 11\} \cap \{2; 4; 5; 6; 7; 9; 10; 11\} =$
 $= \{2; 4; 5; 6; 9; 10; 11\}.$

8. $(A \cap B) \cup (B \cap C) = \{4; 6\} \cup \{2; 4; 6; 9\} = \{2; 4; 6; 9\}.$

9. $(A \cap C) \cup (B \cap C) = \{4; 6; 10\} \cup \{2; 4; 6; 9\} =$
 $= \{2; 4; 6; 9; 10\}.$

10. $(A \cup C) \cap (B \cup C) =$
 $= \{1; 2; 3; 4; 6; 7; 9; 10\} \cap \{2; 4; 5; 6; 7; 9; 10; 11\} =$
 $= \{2; 4; 6; 7; 9; 10\}.$

Решение проверочной работы 2

$$1. A = \{ 1; 2; 4; 5; 7; 8; 10; 11 \};$$

$$B = \{ 2; 3; 5; 6; 8; 9; 11 \};$$

$$D = \{ 1; 3; 4; 6; 7; 9; 10 \}.$$

Найти:

$$1) (A \setminus B) \cap D = \{ 1; 4; 7; 10 \} \cap \{ 1; 3; 4; 6; 7; 9; 10 \} = \\ = \{ 1; 4; 7; 10 \}.$$

$$2) A \setminus (B \cap D) = \{ 1; 2; 4; 5; 7; 8; 10; 11 \} \setminus \{ 3; 6; 9 \} = \\ = \{ 1; 2; 4; 5; 7; 8; 10; 11 \}.$$

$$3) (A \setminus B) \cup D = \{ 1; 4; 7; 10 \} \cup \{ 1; 3; 4; 6; 7; 9; 10 \} = \\ = \{ 1; 3; 4; 6; 7; 9; 10 \}.$$

$$4) (A \setminus D) \cup B = \{ 2; 5; 8; 11 \} \cup \{ 2; 3; 5; 6; 8; 9; 11 \} = \\ = \{ 2; 3; 5; 6; 8; 9; 11 \}.$$

$$5) (A \setminus D) \cap B = \{ 2; 5; 8; 11 \} \cap \{ 2; 3; 5; 6; 8; 9; 11 \} = \\ = \{ 2; 5; 8; 11 \}.$$

$$6) (D \cup B) \setminus A = \\ = \{ 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11 \} \setminus \{ 1; 2; 4; 5; 7; 8; 10; 11 \} = \\ = \{ 3; 6; 9 \}.$$

$$7) (A \cup B) \setminus D = \\ = \{ 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11 \} \setminus \{ 1; 2; 4; 5; 7; 8; 10; 11 \} = \\ = \{ 2; 5; 8; 11 \}.$$

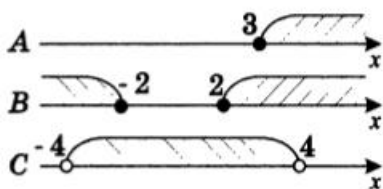
$$8) A \cup (B \setminus D) = \{ 1; 2; 4; 5; 7; 8; 10; 11 \} \cup \{ 2; 5; 8; 11 \} = \\ = \{ 1; 2; 4; 5; 7; 8; 10; 11 \}.$$

$$2. A = \{x | x \geq 3\};$$

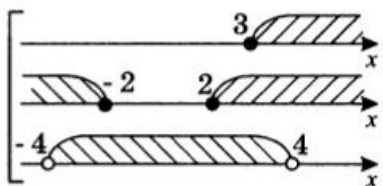
$$B = \{x | x \geq 2 \cup x \leq -2\};$$

$$C = \{x | -4 < x < 4\}.$$

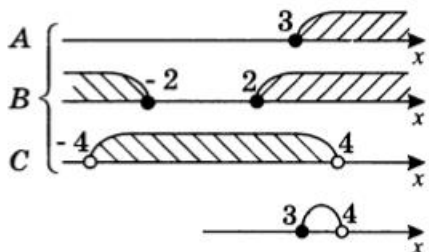
Найти:



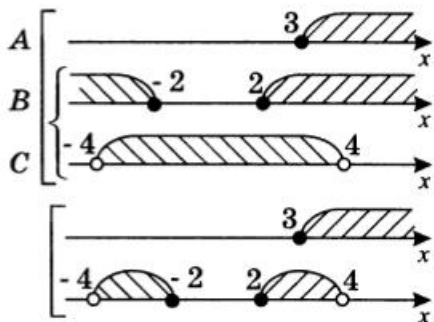
$$1) A \cup B \cup C = (-\infty; \infty).$$



$$2) A \cap B \cap C = [3; 4).$$



$$3) A \cup (B \cap C) = (-4; -2] \cup [2; \infty).$$



$$4) A \setminus B = \emptyset.$$

$$5) A \cup (C \setminus B) = [3; \infty) \cup (-\infty; -4) \cup (4; \infty) = (-\infty; -4) \cup [3; \infty).$$

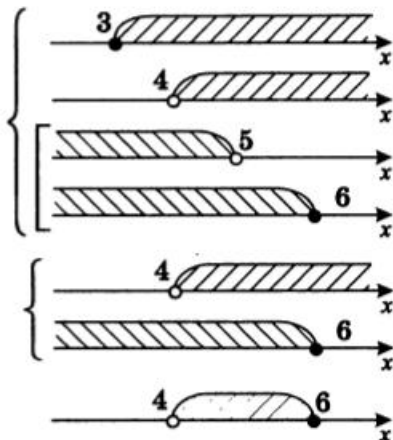
$$6) A \cap (C \setminus B) = [3; \infty) \cap ((-\infty; -4) \cup (4; \infty)) = [3; \infty).$$

- 7) $(A \setminus B) \cap (B \setminus C) =$
 $= ((-\infty; -2] \cup [2; 3)) \cap ((-\infty; -4) \cup (4; \infty)) = [3; \infty).$
- 8) $(A \setminus B) \setminus C = \emptyset \setminus C = \emptyset.$
- 9) $(A \cup B) \setminus (A \cap B) = ((-\infty; -2] \cup [2; \infty)) \setminus [3; \infty) =$
 $= (-\infty; -2] \cup [2; 3).$
- 10) $(A \cup B) \cap C = (-4; -2] \cup [2; 4).$
- 11) $A \cap (B \cup C) = [3; \infty).$
- 12) $(A \cap B) \cup C = [-4; \infty).$
- 13) $B \setminus C = (-2; 2).$
- 14) $(A \cup C) \setminus B = (-2; 2).$
- 15) $(A \cap C) \setminus B = \emptyset.$
- 16) $(A \cap C) \setminus (B \cap C) = [3; 4) \setminus ((-4; -2] \cup [2; 4)) = \emptyset.$
- 17) $(A \setminus C) \setminus (B \setminus C) = [4; \infty) \setminus ((-\infty; -4] \cup [4; \infty)) = \emptyset.$
- 18) $(A \cup C) \setminus (A \cap B) = (-4; \infty) \setminus [3; \infty) = (-4; 3).$

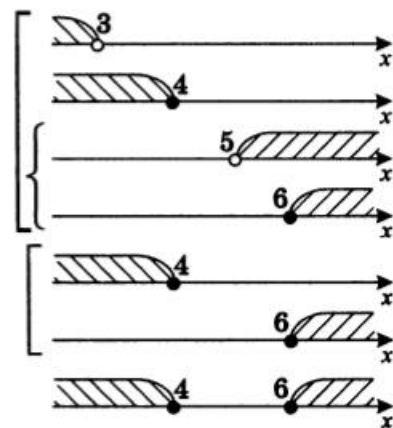
Решение проверочной работы 3

1. Решить неравенства.

$$1) \begin{cases} x \geq 3 \\ x > 4 \\ x < 5 \\ x \leq 6 \end{cases}$$

Ответ: $[4; 6)$.

$$2) \begin{cases} x < 3 \\ x \leq 4 \\ x > 5 \\ x \geq 6 \end{cases}$$

Ответ: $(-\infty; 4) \cup [6; \infty)$.

$$3) \frac{(x+1)^2}{(x+3)(x-2)} \leq 0.$$

$$\begin{cases} (x+1)^2 \geq 0 \\ (x+3)(x-2) < 0 \\ (x+1)^2 \leq 0 \\ (x+3)(x-2) > 0 \end{cases}$$

(с учетом неравенства нулю знаменателей).

а) рассмотрим неравенства для знаменателя.

$(x + 3)(x - 2) < 0$, если

$$\left\{ \begin{array}{l} x + 3 > 0 \\ x - 2 < 0 \end{array} \right. \quad \text{т.е.} \quad \left\{ \begin{array}{l} x > -3 \\ x < 2 \end{array} \right.$$

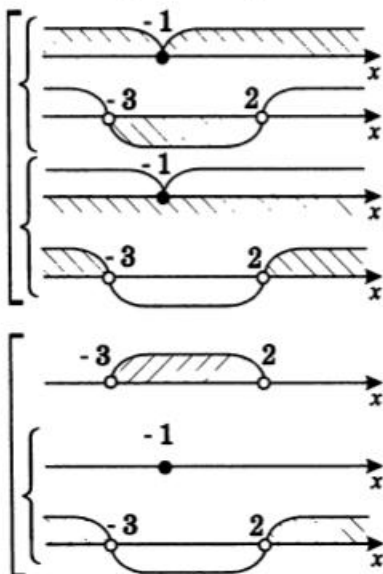
$$\left\{ \begin{array}{l} x + 3 < 0 \\ x - 2 > 0 \end{array} \right. \quad \text{т.е.} \quad \left\{ \begin{array}{l} x < -3 \\ x > 2 \end{array} \right. \quad \emptyset$$

Итак, $-3 < x < 2$.

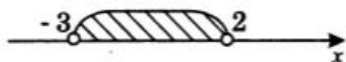
б) Если же $(x + 3)(x - 2) > 0$, то решение

$$\left[\begin{array}{l} x > 2 \\ x < -3 \end{array} \right.$$

Учитывая эти результаты, исходная совокупность систем примет вид



Тогда



Ответ: $(-3; 2)$.

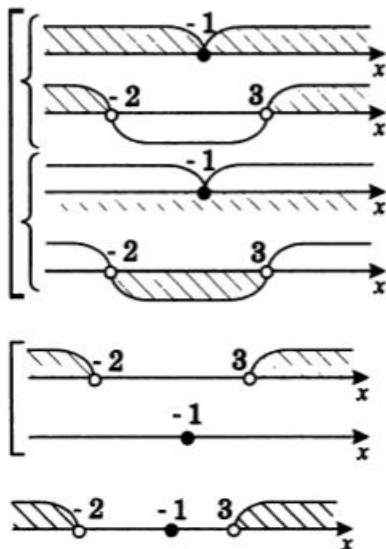
$$4) \frac{(x+1)^2}{(x-3)(x+2)} \geq 0.$$

$$\left[\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} (x+1)^2 \geq 0 \\ (x-3)(x+2) > 0 \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} (x+1)^2 \leq 0 \\ (x-3)(x+2) < 0 \end{array} \right. \end{array} \right.$$

$$а) (x-3)(x+2) > 0,$$

$$\text{если } \left[\begin{array}{l} x-3 > 0 \\ x+2 > 0 \end{array} \right. \quad \text{или} \quad \left[\begin{array}{l} x > 3 \\ x > -2 \end{array} \right. ; \quad \left[\begin{array}{l} x > 3 \\ x < -2 \end{array} \right.$$

б) Аналогично $(x-3)(x+2) < 0$ при $-2 < x < 3$.



Ответ: $(-\infty; -2) \cup \{-1\} \cup \{3; \infty\}$.

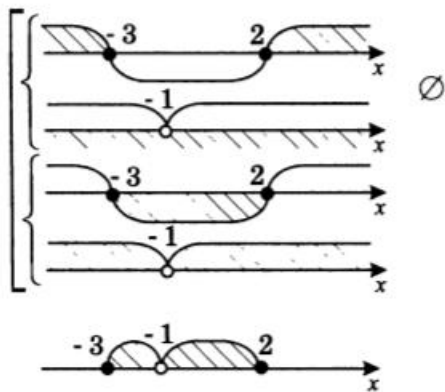
$$5) \frac{(x+3)(x-2)}{(x+1)^2} \leq 0.$$

$$\left[\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} (x+3)(x-2) \geq 0 \\ (x+1)^2 < 0 \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} (x+3)(x-2) \leq 0 \\ (x+1)^2 > 0 \end{array} \right. \end{array} \right. \quad \emptyset.$$

Так как $(x+3)(x-2) \leq 0$ равносильно

$$\left[\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} x+3 \geq 0 \\ x-2 \leq 0 \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} x+3 \leq 0 \\ x-2 \geq 0 \end{array} \right. \end{array} \right. \quad \text{или} \quad \left[\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} x \geq -3 \\ x \leq 2 \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} x \leq -3 \\ x \geq 2 \end{array} \right. \end{array} \right. \quad \emptyset,$$

то исходная совокупность примет вид



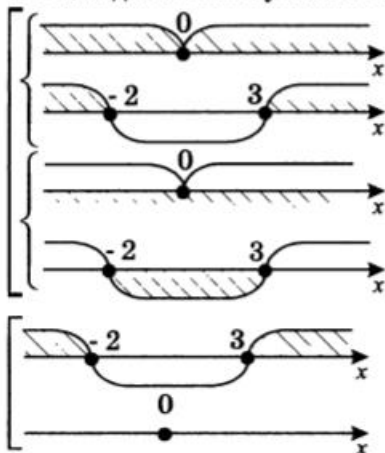
Ответ: $[-3; -1) \cup (-1; 2]$.

$$6) x^2(x-3)(x+2) \geq 0.$$

$$\left[\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} x^2 \geq 0 \\ (x-3)(x+2) \geq 0 \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} x^2 \leq 0 \\ (x-3)(x+2) \leq 0 \end{array} \right. \end{array} \right.$$

$$\text{Так как } (x-3)(x+2) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-3 \geq 0 \\ x+2 \geq 0; \\ x-3 \leq 0 \\ x+2 \leq 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} x \geq 3 \\ x \geq -2 \\ x \leq 3 \\ x \leq -2 \end{cases},$$

то исходная совокупность примет вид



Ответ: $(-\infty; -2] \cup \{0\} \cup [3; \infty)$.

$$7) (x^2 - 4)^2 + (x^2 - 2x - 8)^2 \leq 0.$$

Возможно только если:

$$\begin{cases} (x^2 - 4)^2 = 0 \\ (x^2 - 2x - 8)^2 = 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} x = 2 \\ x = -2 \\ x = 4 \\ x = -2 \end{cases}; \quad x = -2.$$

Ответ: $x = -2$.

$$8) \frac{(x+2)(1-x)}{(x^2-9)^2 + (x^2-2x-3)^2} \leq 0.$$

$$\begin{cases} (x+2)(1-x) \geq 0 \\ (x^2-9)^2 + (x^2-2x-3)^2 < 0 \\ (x+2)(1-x) \leq 0 \\ (x^2-9)^2 + (x^2-2x-3)^2 > 0 \end{cases} \quad \emptyset.$$

$$\text{Так как } (x+2)(1-x) \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x+2 \geq 0 \\ 1-x \leq 0 \\ x+2 \leq 0 \\ 1-x \geq 0 \end{cases};$$

$$\begin{cases} x \geq -2 \\ x \geq 1 \\ x \leq -2 \\ x \leq 1 \end{cases} \begin{cases} x \geq 1 \\ x \leq -2 \end{cases},$$

то исходная совокупность примет вид

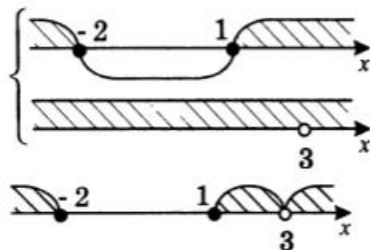
$$\begin{cases} (x+2)(1-x) \leq 0 \\ (x^2-9)^2 + (x^2-2x-3)^2 \neq 0 \end{cases}.$$

Выясним, когда $(x^2-9)^2 + (x^2-2x-3)^2 = 0$,
и исключим эти значения x .

$$\begin{cases} (x^2-9)^2 = 0 \\ (x^2-2x-3)^2 = 0 \end{cases};$$

$$\begin{cases} x = 3 \\ x = -3 \\ x = 3 \\ x = -1 \end{cases}; \quad x = 3.$$

Итак,



Ответ: $(-\infty; -2] \cup [1; 3) \cup (3; \infty)$.

$$2. A = \{1; 3; 5; 8; 9; 10\};$$

$$B = \{2; 4; 6; 8; 9\};$$

$$E = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10\}.$$

Найти:

$$1) A \cap \bar{B} = A \cap \{1; 3; 5; 7; 10\} = \{1; 3; 5; 10\}.$$

$$2) \bar{A} \cup B = \{2; 4; 6; 7\} \cup B = \{2; 4; 6; 7; 8; 9\}.$$

$$3) \overline{A \cup B} = \overline{\{1; 2; 3; 4; 5; 6; 8; 9; 10\}} = \{7\}.$$

$$4) \bar{A} \cup \bar{B} = \{2; 4; 6; 7\} \cup \{1; 3; 5; 7; 10\} = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 10\}.$$

$$5) \overline{A \cap B} = \overline{\{1; 3; 5; 10\}} = \{2; 4; 6; 7; 8; 9\}.$$

$$6) \overline{A \cup B} = \overline{\{8; 9\}} = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 10\}.$$

$$\begin{aligned} 7) (A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap B) &= \\ &= (A \cap \{1; 3; 5; 7; 10\}) \cup (\{2; 4; 6; 7\} \cap B) = \\ &= \{1; 3; 5; 10\} \cup \{2; 4; 6\} = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 10\}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 8) (\bar{A} \cup B) \cap (A \cup \bar{B}) &= \\ &= \{2; 4; 6; 7; 8; 9\} \cap \{1; 3; 5; 7; 8; 9; 10\} = \{7; 8; 9\}. \end{aligned}$$

$$9) E \setminus (A \cup B) = E \setminus \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 8; 9; 10\} = \{7\}.$$

$$10) E \setminus (A \cap \bar{B}) = E \setminus \{1; 3; 5; 10\} = \{2; 4; 6; 7; 8; 9\}.$$

$$11) (E \setminus A) \cap (E \setminus B) = \{2; 4; 6; 7\} \cap \{1; 3; 5; 7; 10\} = \{7\}.$$

$$12) (E \setminus \bar{A}) \cap (E \setminus \bar{B}) = A \cap B = \{8; 9\}.$$

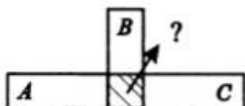
3. В течение недели в кинотеатре шли фильмы A , B и C . Каждый из 40 школьников видел либо все три фильма, либо один из трех.

Фильм A видели 13 школьников.

Фильм B видели 16 школьников.

Фильм C видели 19 школьников.

Сколько школьников видели все три фильма?



Условие задачи можно иллюстрировать данной картинкой, так как нет школьников, которые смотрели бы только два фильма. Поэтому

$$m(A \cap B) = m(A \cap B \cap C);$$

$$m(A \cap C) = m(A \cap B \cap C);$$

$$m(B \cap C) = m(A \cap B \cap C);$$

$$\text{т. е. } m(A) + m(B) + m(C) - 2m(A \cap B \cap C) = 40.$$

Так как $m(A) = 13$; $m(B) = 16$; $m(C) = 19$, то

$$m(A \cap B \cap C) = \frac{13+16+19-40}{2}; \quad m(A \cap B \cap C) = 4.$$

Ответ: только 4 школьника видели все три фильма.

Решение проверочной работы 4

Дано: $x_n = \frac{2n+3}{3n+4}$. Выяснить:

1. Монотонность.
2. Ограниченность.
3. Начиная с какого номера все члены последовательности

x_n таковы, что справедливо неравенство $\left| x_n - \frac{2}{3} \right| < 0,001$.

4. Доказать, что $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{2}{3}$.

$$1. x_{n+1} = \frac{2(n+1)+3}{3(n+1)+4} = \frac{2n+5}{3n+7};$$

$$\begin{aligned} x_{n+1} - x_n &= \frac{2n+5}{3n+7} - \frac{2n+3}{3n+4} = \\ &= \frac{(2n+5)(3n+4) - (2n+3)(3n+7)}{(3n+7)(3n+4)} = \\ &= \frac{6n^2 + 23n + 20 - 6n^2 - 23n - 21}{(3n+7)(3n+4)} = \frac{-1}{(3n+7)(3n+4)} < 0, \end{aligned}$$

т.е. $x_{n+1} < x_n$, значит x_n — убывающая.

2. Вычислим $x_1 = \frac{5}{7}$, тогда $x_n < x_1 = \frac{5}{7}$;

$x_n > 0$, так как $\frac{2n+3}{3n+4} > 0$ для $\forall n \in \mathbb{N}$, тогда

$$\forall n \in \mathbb{N}; x_n \in \left(0; \frac{5}{7} \right].$$

3. Выяснить, начиная с какого номера члена последовательности x_n $\left| x_n - \frac{2}{3} \right| < 0,01$.

$$x_n - \frac{2}{3} = \frac{2n+3}{3n+4} - \frac{2}{3} = \frac{6n+9-6n-8}{3(3n+4)} = \frac{1}{3(3n+4)}.$$

$$\text{Значит } \left| x_n - \frac{2}{3} \right| = \left| \frac{1}{3(3n+4)} \right| = \frac{1}{3(3n+4)},$$

$$\text{т. е. } \left| x_n - \frac{2}{3} \right| < 0,01 \Leftrightarrow \frac{1}{3(3n+4)} < 0,01,$$

$$\frac{1}{3 \cdot 0,01} < 3n + 4; \quad 3n > \frac{1}{0,03} - 4;$$

$$n > \frac{1-0,12}{0,09} = \frac{0,88}{0,09} = \frac{88}{9} = 9\frac{7}{9},$$

$$\text{т. е. для } \forall n > 9 \Rightarrow \left| x_n - \frac{2}{3} \right| < 0,01.$$

4. Доказать, что $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{2}{3}$.

$$\left| x_n - \frac{2}{3} \right| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{3(3n+4)} < \varepsilon; \quad \frac{1}{3\varepsilon} < 3n + 4;$$

$$3n > \frac{1-12\varepsilon}{3\varepsilon}; \quad n > \frac{1-12\varepsilon}{9\varepsilon}.$$

Так как $N_0 = \left[\frac{1-12\varepsilon}{9\varepsilon} \right]$, тогда для

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_0 \left(N_0 = \left[\frac{1-12\varepsilon}{9\varepsilon} \right] \right) \forall n > N_0 \Rightarrow \left| x_n - \frac{2}{3} \right| < \varepsilon,$$

$$\text{т. е. } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{2}{3}.$$

Решение проверочной работы 5

Вычислить.

$$\begin{aligned}
 1. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2+3n)(n^2+n+1)}{5n^3-3n^2+1} &= \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^3+5n^2+5n+2}{5n^3-3n^2+1} = \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 \left(3 + \frac{5}{n} + \frac{5}{n^2} + \frac{2}{n^3} \right)}{n^3 \left(5 - \frac{3}{n} + \frac{1}{n^3} \right)} = \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 + \frac{5}{n} + \frac{5}{n^2} + \frac{2}{n^3}}{5 - \frac{3}{n} + \frac{1}{n^3}} = \frac{3+0+0+0}{5-0+0} = \frac{3}{5}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n+2} - \sqrt{2n-1}}{\sqrt{n+3} + 3} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n} \left(\sqrt{1 + \frac{2}{n}} - \sqrt{2 - \frac{1}{n}} \right)}{\sqrt{n} \left(\sqrt{1 + \frac{3}{n}} + \frac{3}{\sqrt{n}} \right)} = \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1 + \frac{2}{n}} - \sqrt{2 - \frac{1}{n}}}{\sqrt{1 + \frac{3}{n}} + \frac{3}{\sqrt{n}}} = \frac{\sqrt{1+0} - \sqrt{2-0}}{\sqrt{1+0} + 0} = \frac{1 - \sqrt{2}}{1} = 1 - \sqrt{2}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 3. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{n^2 - 3} - \sqrt{n^2 - n + 1} \right) &= \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{n^2 - 3} - \sqrt{n^2 - n + 1})(\sqrt{n^2 - 3} + \sqrt{n^2 - n + 1})}{\sqrt{n^2 - 3} + \sqrt{n^2 - n + 1}} = \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - 3 - n^2 + n - 1}{\sqrt{n^2 - 3} + \sqrt{n^2 - n + 1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n - 4}{\sqrt{n^2 - 3} + \sqrt{n^2 - n + 1}} = \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \left(1 - \frac{4}{n} \right)}{n \left(\sqrt{1 - \frac{3}{n^2}} + \sqrt{1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}} \right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{4}{n}}{\sqrt{1 - \frac{3}{n^2}} + \sqrt{1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}}} = \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - 0}{\sqrt{1 - 0} + \sqrt{1 - 0 + 0}} = \frac{1}{1 + 1} = 0,5.
 \end{aligned}$$

$$4. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt[3]{2n^3 - 2n^2 + 1} - \sqrt[3]{2n^3 + n^2 + 1} \right) =$$

Домножим на неполный квадрат суммы числитель и знаменатель данного выражения.

$$\begin{aligned} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\sqrt[3]{2n^3 - 2n^2 + 1} - \sqrt[3]{2n^3 + n^2 + 1} \right) \left(\sqrt[3]{(2n^3 - 2n^2 + 1)^2} + \sqrt[3]{(2n^3 - 2n^2 + 1)(2n^3 + n^2 + 1)} + \sqrt[3]{(2n^3 + n^2 + 1)^2} \right)}{\sqrt[3]{(2n^3 - 2n^2 + 1)^2} + \sqrt[3]{(2n^3 - 2n^2 + 1)(2n^3 + n^2 + 1)} + \sqrt[3]{(2n^3 + n^2 + 1)^2}} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^3 - 2n^2 + 1 - 2n^3 - n^2 - 1}{\sqrt[3]{(2n^3 - 2n^2 + 1)^2} + \sqrt[3]{(2n^3 - 2n^2 + 1)(2n^3 + n^2 + 1)} + \sqrt[3]{(2n^3 + n^2 + 1)^2}} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-3n^2}{n^2 \left(\sqrt[3]{\left(2 - \frac{2}{n} + \frac{1}{n^3}\right)^2} + \sqrt[3]{\left(2 - \frac{2}{n} + \frac{1}{n^3}\right)\left(2 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^3}\right)} + \sqrt[3]{\left(2 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^3}\right)^2} \right)} = \\ &= \frac{-3}{\sqrt[3]{(2-0+0)^2} + \sqrt[3]{(2-0+0)(2+0+0)} + \sqrt[3]{(2+0+0)^2}} = \frac{-3}{3\sqrt[3]{4}} = -\frac{1}{\sqrt[3]{4}}. \end{aligned}$$

$$5. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 8} + \frac{1}{8 \cdot 11} + \dots \right).$$

2; 5; 8; 11; ... - очевидно, что мы имеем дело с арифметической прогрессией.

$$\left. \begin{array}{l} a_1 = 2 \\ d = 3 \end{array} \right| a_n = a_1 + (n-1)d; \quad \text{тогда} \quad a_n = 2 + (n-1)3,$$

$$\text{т.е. } a_n = 3n - 1$$

Значит n -й член суммы равен $\frac{1}{(3n-1)(3n+2)}$, и

$$\text{тогда получим } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 8} + \frac{1}{8 \cdot 11} + \dots + \frac{1}{(3n-1)(3n+2)} \right).$$

Для вычисления предела последовательности учтем, что

$$\begin{aligned} \frac{1}{2 \cdot 5} &= \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5} \right) \\ \frac{1}{5 \cdot 8} &= \frac{1}{3} \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{8} \right) \\ \frac{1}{8 \cdot 11} &= \frac{1}{3} \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{11} \right) \\ \dots &\dots \\ \frac{1}{(3n-1)(3n+2)} &= \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3n-1} - \frac{1}{3n+2} \right). \end{aligned}$$

Сложив почленно левые и правые части равенств, получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{2 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 8} + \frac{1}{8 \cdot 11} + \dots + \frac{1}{(3n-1)(3n+2)} &= \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3n+2} \right) = \\ &= \left(\frac{n}{2(3n+2)} \right). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Значит } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 8} + \frac{1}{8 \cdot 11} + \dots + \frac{1}{(3n-1)(3n+2)} \right) &= \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2(3n+2)} = \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3 + \frac{2}{n}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3+0} = \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 6. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n-2)^4 - (n+2)^4}{(n-2)^3 + (n+2)^3} &= \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{((n-2)^2 + (n+2)^2)((n-2)^2 - (n+2)^2)}{(n-2+n+2)((n-2)^2 - (n-2)(n+2) + (n+2)^2)} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n^2 - 4n + 4 + n^2 + 4n + 4)(n-2+n+2)(n-2-n-2)}{2n(n^2 - 4n + 4 - n^2 + 4n + n^2 + 4n + 4)} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4(n^2 + 4)n \cdot (-4)}{2n(n^2 + 12)} = -8 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 4}{n^2 + 12} = \\ &= -8 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 \left(1 + \frac{4}{n^2} \right)}{n^2 \left(1 + \frac{12}{n^2} \right)} = -8 \cdot \frac{1+0}{1+0} = -8. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
7. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^3+6n^2+12n+8} - \sqrt{n(n+1)(n+3)}}{\sqrt{n+3}} &= \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{\frac{3}{2}} + 6n^2 + 12n + 8 - n^{\frac{3}{2}} - 4n^2 - 3n}{\sqrt{n+3} \left(\sqrt{(n+2)^3} + \sqrt{n(n+1)(n+3)} \right)} = \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 + 9n + 8}{\sqrt{n} \cdot \sqrt{n^3} \left(\sqrt{1 + \frac{3}{n}} \left(\sqrt{\left(1 + \frac{2}{n}\right)^3} + \sqrt{1 \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(1 + \frac{3}{n}\right)} \right) \right)} = \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{9}{n} + \frac{8}{n^2}}{\sqrt{1 + \frac{3}{n}} \cdot \left(\sqrt{\left(1 + \frac{2}{n}\right)^3} + \sqrt{\left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(1 + \frac{3}{n}\right)} \right)} = \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + 0 + 0}{\sqrt{1+0} \left(\sqrt{(1+0)^3} + \sqrt{(1+0)(1+0)} \right)} = \frac{2}{1 \cdot (1+1)} = 1.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
8. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[4]{n} - 16n^2}{4n - \sqrt[5]{32n^{10}} + 1} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 \left(\frac{1}{\sqrt[4]{n^7}} - 16 \right)}{n^2 \left(\frac{4}{n} - \sqrt[5]{32 + \frac{1}{n^{10}}} \right)} = \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{\sqrt[4]{n^7}} - 16}{\frac{4}{n} - \sqrt[5]{32 + \frac{1}{n^{10}}}} = \frac{0 - 16}{0 - \sqrt[5]{32 + 0}} = \frac{-16}{-2} = 8.
\end{aligned}$$

Решение проверочной работы 61. $a_n - \div$

$$\left\{ \begin{array}{l} a_n = \frac{1}{m} \\ a_m = \frac{1}{n} \end{array} \right. S_{mn} = ?$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a_n = a_1 + (n-1)d = \frac{1}{m}; \\ a_m = a_1 + (m-1)d = \frac{1}{n}. \end{array} \right. \quad d(n-m) = \frac{1}{m} - \frac{1}{n};$$

$$a_1 = \frac{1}{m} - (n-1)d = \frac{1}{m} - \frac{n-1}{mn} = \frac{1}{mn};$$

$$S_{mn} = \frac{2 \cdot \frac{1}{mn} + \frac{1}{mn}(mn-1)}{2} \cdot mn = \frac{2+mn-1}{2} = \frac{mn+1}{2}.$$

Ответ: $S_{mn} = \frac{mn+1}{2}$.

2. $a_n - \div$

$$\left\{ \begin{array}{l} a_1 = -3,5 \\ d = 0,5 \\ S_n = 8,5 \end{array} \right. n = ?$$

$$\frac{2(-3,5) + (n-1) \cdot 0,5}{2} \cdot n = 8,5;$$

$$(-7 + (n-1) \cdot 0,5) \cdot n = 17;$$

$$n^2 - 15n - 34 = 0; \quad \left[\begin{array}{l} n = 17 \\ n = -2 \notin \mathbb{N} \end{array} \right.$$

Ответ: $n = 17$.

3. $a_n - \div$; $a_n \in \mathbb{N}$; $d \in \mathbb{N}$

$$\left\{ \begin{array}{l} a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 40 \\ a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3} = 104 \end{array} \right. n = ? \quad a_1 = ? \quad d = ?$$

$$\begin{cases} a_1 + a_1 + d + a_1 + 2d + a_1 + 3d = 40 \\ a_1 + (n-1)d + a_1 + (n-2)d + a_1(n-3)d + a_1 + (n-4)d = 104 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4a_1 + 6d = 40 \\ 4a_1 + (4n-10)d = 104 \end{cases}; \quad \begin{cases} 2a_1 + 3d = 20 \\ (n-4)d = 16 \end{cases};$$

$$4nd - 16d = 64.$$

Очевидно $n > 4$. Так как у нас дана система двух уравнений с тремя неизвестными и $a_n \in \mathbb{N}$; $d \in \mathbb{N}$, то можно простым перебором найти их.

$n = 5$; $d = 16$; $a_1 = -14$ не подходит;

$n = 6$; $d = 8$; $a_1 = -2$ не подходит

и так далее.

Подходит $n = 8$; $d = 4$; $a_1 = 4$ и $n = 12$; $d = 2$; $a_1 = 7$.

Пример можно перебирать по d .

Ответ: $n = 8$; $d = 4$; $a_1 = 4$; $n = 12$; $d = 2$; $a_1 = 7$.

4. У отца было пять сыновей, которые рождались с интервалом в 3 года. В первый раз в 5 лет каждый в подарок получал 5 книг и каждый последующий год на одну книгу больше. Сколько было каждому из сыновей лет, когда общее число книг, подаренных им, составило 325 книг.

Пусть младшему сыну в этой семье было x лет, тогда с учетом разницы в 3 года им было

$$x; x + 3; x + 6; x + 9; x + 12.$$

Первый раз каждый получил 5 книг и в дальнейшем получал на одну книгу больше.

Младший получал $(x - 4)$ раз книги.

Далее по старшинству остальные получали книги

$$(x - 1), (x + 2), (x + 5), (x + 8) \text{ раз. Получим}$$

прогрессию, где $a_1 = 5$, $d = 1$.

Самый младший получил в сумме книг

$$S_1 = \frac{2 \cdot 5 + (x-4-1) \cdot 1}{2} \cdot (x-4) = \frac{(x+5)(x-4)}{2}.$$

Далее по старшинству

$$S_2 = \frac{2 \cdot 5 + (x-1-1) \cdot 1}{2} \cdot (x-1) = \frac{(x+8)(x-1)}{2};$$

$$S_3 = \frac{2 \cdot 5 + (x+2-1) \cdot 1}{2} \cdot (x+2) = \frac{(x+11)(x+2)}{2};$$

$$S_4 = \frac{2 \cdot 5 + (x+5-1) \cdot 1}{2} \cdot (x+5) = \frac{(x+14)(x+5)}{2};$$

$$S_5 = \frac{2 \cdot 5 + (x+8-1) \cdot 1}{2} \cdot (x+8) = \frac{(x+17)(x+8)}{2};$$

$$S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + S_5 = 325;$$

$$\frac{(x+5)(x-4)}{2} + \frac{(x+8)(x-1)}{2} + \frac{(x+11)(x+2)}{2} + \\ + \frac{(x+14)(x+5)}{2} + \frac{(x+17)(x+8)}{2} = 325.$$

Получим $x^2 + 13x - 90 = 0$; $\begin{cases} x = -18 & \text{— не подходит} \\ x = 5. \end{cases}$

Ответ: итак, 5; 8; 11; 14; 17 лет было сыновьям, когда в сумме все они получили 325 книг.

5. При каких x и какую прогрессию образуют числа

$$\sqrt{2x+9}; \sqrt{5x}; \sqrt{8x+9}, \text{ если } x \in \mathbb{Z}?$$

1) По признаку геометрической прогрессии

$$(\sqrt{5x})^2 = \sqrt{2x+9} \cdot \sqrt{8x+9}, \text{ тогда}$$

$$\begin{cases} (5x)^2 = (2x+9)(8x+9); \\ x \geq 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} 25x^2 = 16x^2 + 90x + 81; \\ x \geq 0 \end{cases};$$

$$\begin{cases} 9x^2 - 90x - 81 = 0; \\ x \geq 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} x^2 - 10x - 9 = 0; \\ x \geq 0 \end{cases};$$

$$\begin{cases} x = 5 + \sqrt{34} \\ x = 5 - \sqrt{34}; \\ x \geq 0 \end{cases}; \quad x = 5 + \sqrt{34} \notin \mathbb{Z}.$$

2) По признаку арифметической прогрессии

$$\sqrt{5x} = \frac{\sqrt{2x+9} + \sqrt{8x+9}}{2}, \text{ тогда}$$

$$2\sqrt{5x} = \sqrt{2x+9} + \sqrt{8x+9};$$

$$\begin{cases} 4 \cdot 5x = 2x + 9 + 2\sqrt{16x^2 + 90x + 81} + 8x + 9; \\ x \geq 0 \end{cases};$$

$$\begin{cases} 5x - 9 = \sqrt{16x^2 + 90x + 81}; \\ x \geq 0 \end{cases};$$

$$\begin{cases} x \geq 1,8 \\ 25x^2 - 90x + 81 = 16x^2 + 90x + 81; \end{cases};$$

$$\begin{cases} x \geq 1,8 \\ 9x(x - 20) = 0 \end{cases} \quad x = 20;$$

при $x = 20$ получим 7; 10; 13 (значения корней при $x = 20$).

Ответ: при $x = 20$ эти числа образуют арифметическую прогрессию.

6. $b_n - \dots$;

$$\begin{cases} b_1 + b_2 = 8 \\ b_4 + b_5 = 216 \end{cases} \quad q = ?; \quad b_1 = ?$$

$$\begin{cases} b_1 + b_1q = 8 \\ b_1q^3 + b_1q^4 = 216; \end{cases}$$

$$\begin{cases} b_1(1 + q) = 8 \\ b_1q^3(1 + q) = 216; \end{cases}$$

$$\begin{cases} q^3 = 27 \\ b_1(1 + q) = 8; \end{cases} \quad \begin{cases} q = 3 \\ b_1 = 2. \end{cases}$$

Ответ: $b_1 = 2$; $q = 3$.

7. $b_n - \dots$

$$\left. \begin{array}{l} b_1 = 54 \\ S_3 = 78 \end{array} \right\} S_5 = ?$$

$$\left\{ \begin{array}{l} b_1 = 54 \\ \frac{b_1(1-q^3)}{1-q} = 78 \end{array} \right. ; \quad \left\{ \begin{array}{l} b_1 = 54 \\ 54(1+q+q^2) = 78 \end{array} \right. ;$$

$$\left\{ \begin{array}{l} b_1 = 54 \\ 54q^2 + 54q - 24 = 0 \end{array} \right. ; \quad \left\{ \begin{array}{l} b_1 = 54 \\ 9q^2 + 9q - 4 = 0 \end{array} \right. ;$$

$$\left\{ \begin{array}{l} b_1 = 54 \\ q = -\frac{4}{3} \\ q = \frac{1}{3} \end{array} \right.$$

1) Пусть $\left\{ \begin{array}{l} b_1 = 54 \\ q = -\frac{4}{3} \end{array} \right.$, тогда

$$\begin{aligned} S_5 &= \frac{54 \left(1 - \left(-\frac{4}{3} \right)^5 \right)}{1 - \left(-\frac{4}{3} \right)} = \frac{2 \cdot 27 + 2 \cdot 3^3 \cdot \frac{4^5}{3^5}}{1 + \frac{4}{3}} = \\ &= \frac{2 \cdot 27 + \frac{2 \cdot 4^5}{3^2}}{\frac{7}{3}} = \frac{54 \cdot 9 + 2 \cdot 1024}{7 \cdot 3} = \frac{2534}{7 \cdot 3} = \frac{362}{3} = 120 \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

2) Пусть $\left\{ \begin{array}{l} b_1 = 54 \\ q = \frac{1}{3} \end{array} \right.$, тогда

$$\begin{aligned} S_5 &= \frac{54 \left(1 - \left(\frac{1}{3} \right)^5 \right)}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{54 - \frac{2 \cdot 27}{3^5}}{\frac{2}{3}} = \frac{54 - \frac{2}{9}}{\frac{2}{3}} = \\ &= \frac{54 \cdot 9 - 2}{6} = 80 \frac{2}{3} \end{aligned}$$

Ответ: $S_5 = 120 \frac{2}{3}$ или $S_5 = 80 \frac{2}{3}$.

8. $b_n - \dots$

$$\left\{ \begin{array}{l} b_4 - b_1 = 52 \\ b_1 + b_2 + b_3 = 26 \end{array} \right. \cdot b_6 = ?$$

$$\left\{ \begin{array}{l} b_1 q^3 - b_1 = 52 \\ b_1 + b_1 q^1 + b_1 q^2 = 26 \end{array} \right. ;$$

$$\left\{ \begin{array}{l} b_1(q^3 - 1) = 52 \\ b_1(1 + q + q^2) = 26 \end{array} \right. ; \quad \boxed{2} : \boxed{1}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} q - 1 = 2 \\ b_1(1 + q + q^2) = 26 \end{array} \right. ;$$

$$\left\{ \begin{array}{l} q = 3 \\ b_1(1 + 3 + 9) = 26 \end{array} \right. ;$$

$$\left\{ \begin{array}{l} q = 3 \\ b_1 = 2 \end{array} \right. ;$$

$$b_6 = b_1 \cdot q^5 ; \text{ т. е. } b_6 = 2 \cdot 3^5 = 486 .$$

Ответ: $b_6 = 486$.

9. Доказать, что $b_3 \cdot b_5 \cdot b_7 \cdot \dots \cdot b_{2n+1} = b_1^n q^{n^2+n}$,

если $b_n - \dots$.

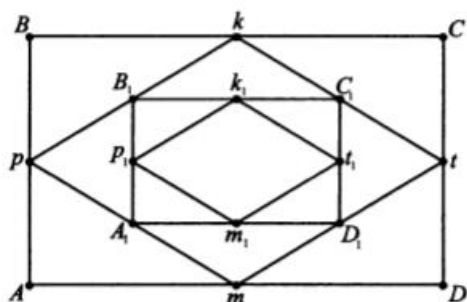
Доказательство.

$$\begin{aligned} b_3 \cdot b_5 \cdot b_7 \cdot \dots \cdot b_{2n+1} &= b_1 \cdot q^2 \cdot b_1 q^4 \cdot b_1 q^6 \cdot \dots \cdot b_1 q^2 = \\ &= b_1^n \cdot q^{2+4+6+\dots+2n} = b_1^n \cdot q^{n^2+n} , \end{aligned}$$

что и требовалось доказать,

$$\text{так как } 2 + 4 + 6 + \dots + 2n = \frac{2+2n}{2} \cdot n = n(n+1) .$$

10. Из прямоугольника со сторонами 20 и 12 через середины сторон вырезали ромб, а из него через середины сторон вырезали прямоугольник. Этот процесс можно продолжать. Вычислить площадь первых десяти фигур.



- 1) $S_{ABCD} = 12 \cdot 20 = 240e\partial^2$;
- 2) $S_{p_k t m} = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 20 = 120e\partial^2$;
- 3) $S_{A_1 B_1 C_1 D_1} = \frac{1}{4} \cdot 12 \cdot 20 = 60e\partial^2$.

Итак, ясно, что площади последовательно вырезаемых фигур (независимо от их вида) образуют геометрическую прогрессию, где $q = \frac{1}{2}$.

$$\begin{aligned}
 S_{10} &= \frac{240 \left(1 - \left(\frac{1}{2} \right)^{10} \right)}{1 - \frac{1}{2}} = 480 - 30 \cdot 2^4 \cdot \frac{1}{2^{10}} = \\
 &= 480 - \frac{30}{64} = 479 \frac{17}{32}.
 \end{aligned}$$

Решение зачетной работы 1

Дано:

$$A = \{1; 2; 3; 5; 7; 10\};$$

$$B = \{3; 4; 6; 9; 10\};$$

$$C = \{2; 5; 7; 9; 11\}.$$

Найти:

1. $A \cap B = \{3; 10\}.$

2. $A \cup B = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 9; 10\}.$

3. $A \cup (B \cap C) = A \cup 9 = \{1; 2; 3; 5; 7; 9; 10\}.$

4. $(A \cup B) \cap C = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 9; 10\} \cap \{2; 5; 7; 9; 11\} =$
 $= \{2; 5; 7; 9\}.$

5. $A \cap (B \cup C) = \{1; 2; 3; 5; 7; 10\} \cap \{2; 3; 4; 5; 6; 7; 9; 10; 11\} =$
 $= \{2; 3; 5; 7; 10\}.$

6. $(A \cap B) \cup C = \{3; 10\} \cup \{2; 5; 7; 9; 11\} =$
 $= \{2; 3; 5; 7; 9; 10; 11\}.$

7. $(A \cup B) \cap (B \cup C) = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 9; 10\} \cap$
 $\cap \{2; 3; 4; 5; 6; 7; 9; 10; 11\} = \{2; 3; 4; 5; 6; 7; 9; 10\}.$

8. $(A \cap B) \cup (B \cap C) = \{3; 10\} \cup \{9\} = \{3; 9; 10\}.$

9. $(A \cap C) \cup (B \cap C) = \{2; 5; 7\} \cup \{9\} = \{2; 5; 7; 9\}.$

10. $(A \cup C) \cap (B \cup C) =$
 $= \{1; 2; 3; 5; 7; 9; 10; 11\} \cap \{2; 3; 4; 5; 6; 7; 9; 10; 11\} =$
 $= \{2; 3; 5; 7; 9; 10; 11\}.$

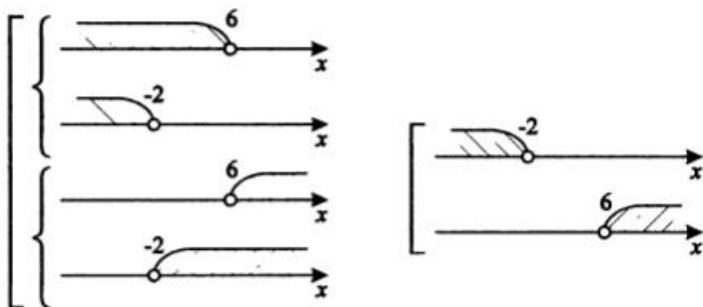
Решение зачетной работы 2

Решить неравенства.

1. $(6 - x)(x + 2) < 0$.

$$\left\{ \begin{array}{l} 6 - x > 0 \\ x + 2 < 0 \end{array} \right. ; \quad \left\{ \begin{array}{l} x < 6 \\ x < -2 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 6 - x < 0 \\ x + 2 > 0 \end{array} \right. ; \quad \left\{ \begin{array}{l} x > 6 \\ x > -2 \end{array} \right.$$



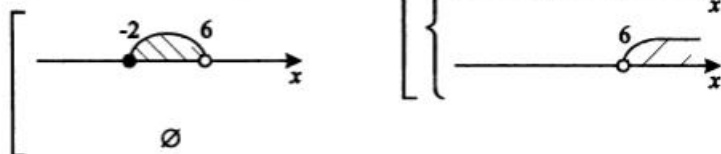
Примечание. Неравенство $6 > x$ равносильно $x < 6$, читать можно как справа налево, так и слева направо.

Ответ: $(-\infty; -2) \cup (6; \infty)$.

2. $\frac{x+2}{6-x} \geq 0$.

$$\left\{ \begin{array}{l} x + 2 \geq 0 \\ 6 - x > 0 \end{array} \right. ; \quad \left\{ \begin{array}{l} x \geq -2 \\ x < 6 \end{array} \right.$$

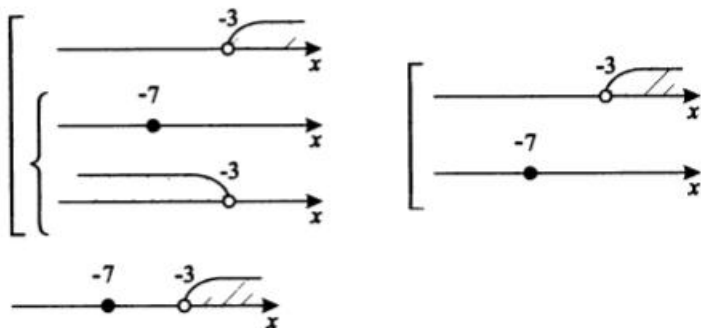
$$\left\{ \begin{array}{l} x + 2 \leq 0 \\ 6 - x < 0 \end{array} \right. ; \quad \left\{ \begin{array}{l} x \leq -2 \\ x > 6 \end{array} \right.$$



Ответ: $[-2; 6)$.

$$3. \frac{(x+7)^2}{x+3} \geq 0.$$

$$\left[\begin{cases} (x+7)^2 \geq 0 \\ x+3 > 0 \end{cases} ; \begin{cases} \forall x \\ x > -3 \end{cases} \right. \\ \left. \begin{cases} (x+7)^2 \leq 0 \\ x+3 < 0 \end{cases} \right] \begin{cases} x = -7 \\ x < -3 \end{cases}$$



Ответ: $\{-7\} \cup (-3; \infty)$.

$$4. \frac{(x+3)^2}{x^2-1} \leq 0; \quad \left[\begin{cases} (x+3)^2 \geq 0 \\ x^2-1 < 0 \end{cases} ; \begin{cases} \forall x \\ (x-1)(x+1) < 0 \end{cases} \right. \\ \left. \begin{cases} (x+3)^2 \leq 0 \\ x^2-1 > 0 \end{cases} \right] \begin{cases} x = -3 \\ x^2-1 > 0 \end{cases}$$

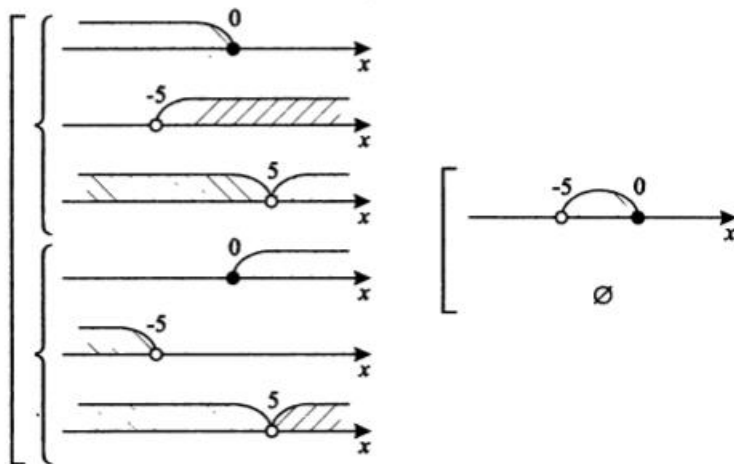
$$\left[\begin{cases} x-1 > 0 \\ x+1 < 0 \end{cases} ; \begin{cases} x > 1 \\ x < -1 \end{cases} \right] \emptyset \\ \left[\begin{cases} x-1 < 0 \\ x+1 > 0 \end{cases} ; \begin{cases} x < 1 \\ x > -1 \end{cases} \right] \cdot \\ \left[\begin{cases} x = -3 \\ 3^2 - 1 > 0 \end{cases} \right] \begin{cases} x = -3 \\ \forall x \end{cases}$$

Ответ: $(-1; 1) \cup \{-3\}$.

$$5. \frac{x^2 - 5x}{x^2 - 25} \leq 0$$

$$\frac{(x-5)x}{(x-5)(x+5)} \leq 0; \quad \begin{cases} \frac{x}{x+5} \leq 0; \\ x \neq 5 \end{cases}$$

$$\left[\begin{cases} x \leq 0 \\ x + 5 > 0 \\ x \neq 5 \\ x \geq 0 \\ x + 5 < 0 \\ x \neq 5 \end{cases} \right]; \quad \left[\begin{cases} x \leq 0 \\ x > -5 \\ x \neq 5 \\ x \geq 0 \\ x < -5 \\ x \neq 5 \end{cases} \right]$$



Ответ: $(-5; 0]$.

$$6. \frac{(x-3)(x+2)}{(x-1)^2} \leq 0.$$

$$\left[\begin{cases} (x-3)(x+2) \geq 0 \\ (x-1)^2 < 0 \\ (x-3)(x+2) \leq 0 \\ (x-1)^2 > 0 \end{cases} \right]; \quad \left[\begin{array}{l} \emptyset \\ (x-3)(x+2) \leq 0; \\ x \neq 1 \end{array} \right]$$

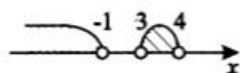
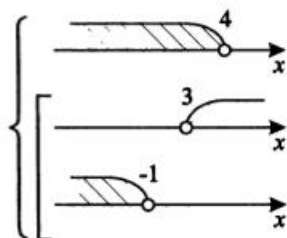
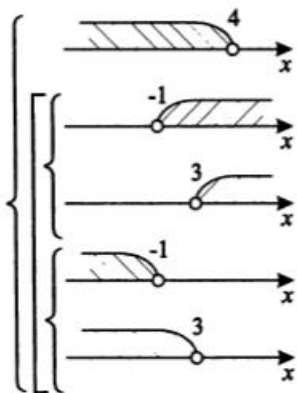
$$\left\{ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} x - 3 \geq 0 \\ x + 2 \leq 0 \end{array} \right. \quad \emptyset \\ \left\{ \begin{array}{l} x - 3 \leq 0 \\ x + 2 \geq 0 \end{array} \right. \\ x \neq 1 \end{array} \right. ; \quad \left\{ \begin{array}{l} x \leq 3 \\ x \geq -2 \\ x \neq 1 \end{array} \right.$$

Ответ: $[-2; 1) \cup (1; 3]$.

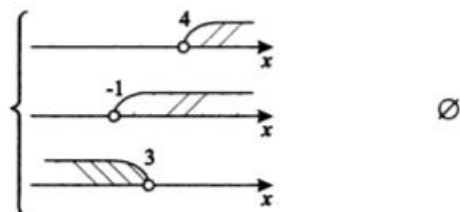
7. $(4 - x)(x + 1)(x - 3) > 0$.

$$\left\{ \begin{array}{l} 4 - x > 0 \\ (x + 1)(x - 3) > 0 \\ 4 - x < 0 \\ (x + 1)(x - 3) < 0 \end{array} \right. ;$$

a) $\left\{ \begin{array}{l} x < 4 \\ \left\{ \begin{array}{l} x + 1 > 0 \\ x - 3 > 0 \end{array} \right. ; \\ \left\{ \begin{array}{l} x + 1 < 0 \\ x - 3 < 0 \end{array} \right. \end{array} \right.$



$$6) \begin{cases} x > 4 \\ \begin{cases} x + 1 > 0 \\ x - 3 < 0; \end{cases} \\ \begin{cases} x + 1 < 0 \\ x - 3 > 0 \end{cases} \end{cases}$$



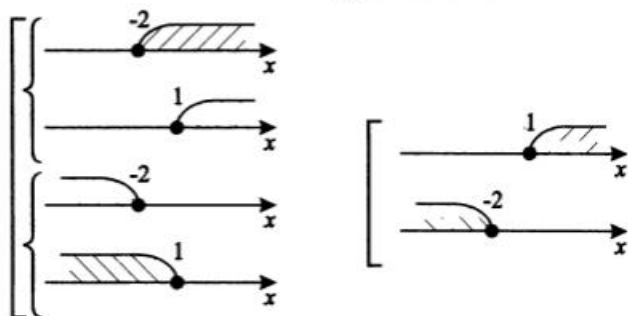
Ответ: $(-\infty; -1) \cup (3; 4)$.

$$8. \frac{(x+2)(1-x)}{(x^2-9)^2 + (x^2+2x-3)^2} \leq 0.$$

$$\begin{cases} (x+2)(1-x) \geq 0 \\ (x^2-9)^2 + (x^2+2x-3)^2 < 0 \end{cases} \quad \emptyset ;$$

$$\begin{cases} (x+2)(1-x) \leq 0 \\ (x^2-9)^2 + (x^2+2x-3)^2 > 0 \end{cases}$$

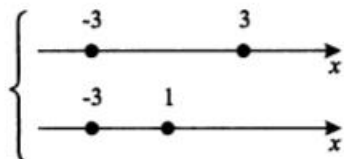
$$a) (x+2)(1-x) \leq 0; \quad \begin{cases} x+2 \geq 0 \\ 1-x \leq 0; \\ x+2 \leq 0 \\ 1-x \geq 0 \end{cases}$$



$$\text{б) } (x^2 - 9)^2 + (x^2 + 2x - 3)^2 > 0$$

$$\text{Исключим } (x^2 - 9)^2 + (x^2 + 2x - 3)^2 = 0$$

$$\begin{cases} x^2 - 9 = 0 \\ x^2 + 2x - 3 = 0 \end{cases};$$



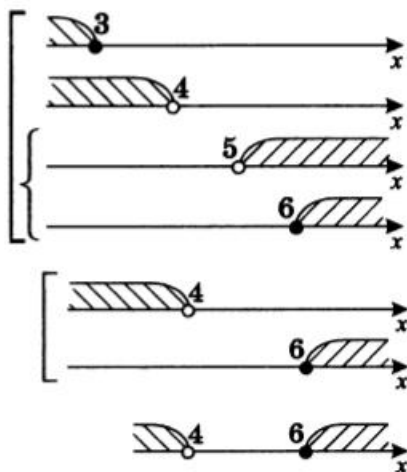
$$x = -3.$$

$$\text{Ответ: } (-\infty; -3) \cup (-3; -2] \cup [1; \infty).$$

Решение зачетной работы 3

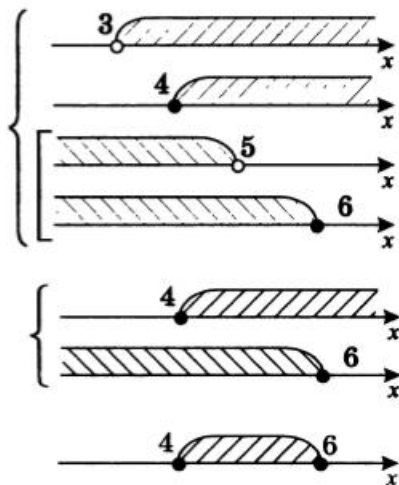
1. Решить неравенства.

$$1) \begin{cases} x \leq 3 \\ x < 4 \\ x > 5 \\ x \geq 6 \end{cases}$$



Ответ: $(-\infty; 4] \cup [6; \infty)$.

$$2) \begin{cases} x > 3 \\ x \geq 4 \\ x < 5 \\ x \leq 6 \end{cases}$$



Ответ: $[4; 5)$.

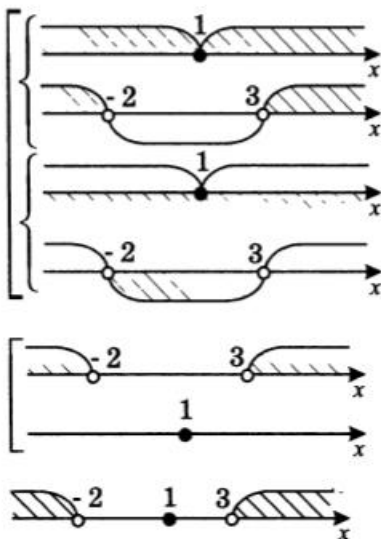
$$3) \frac{(x-1)^2}{(x-3)(x+2)} \geq 0.$$

$$\left[\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} (x-1)^2 \geq 0 \\ (x-3)(x+2) > 0 \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} (x-1)^2 \leq 0 \\ (x-3)(x+2) < 0 \end{array} \right. \end{array} \right. .$$

Так как $(x-3)(x+2) > 0$, то

$$\left[\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} x-3 > 0 \\ x+2 > 0 \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} x-3 < 0 \\ x+2 < 0 \end{array} \right. \end{array} \right. \text{ или } \left[\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} x > 3 \\ x > -2 \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} x < 3 \\ x < -2 \end{array} \right. \end{array} \right. ; \quad \left[\begin{array}{l} x > 3 \\ x < -2 \end{array} \right. .$$

При решении учтем, что $(x-3)(x+2) < 0$ есть дополнение до прямой $(x-3)(x+2) > 0$ без $x = 3$ и $x = -2$.



Ответ: $(-\infty; -2) \cup \{1\} \cup (3; \infty)$.

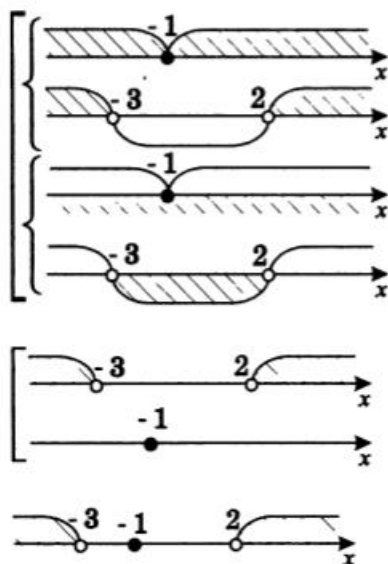
$$4) \frac{(x+1)^2}{(x+3)(x-2)} \geq 0.$$

$$\left[\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} (x+1)^2 \geq 0 \\ (x+3)(x-2) > 0 \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} (x+1)^2 \leq 0 \\ (x+3)(x-2) < 0 \end{array} \right. \end{array} \right. .$$

Так как $(x+3)(x-2) > 0$, то

$$\left[\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} x+3 > 0 \\ x-2 > 0 \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} x+3 < 0 \\ x-2 < 0 \end{array} \right. \end{array} \right. \text{ или } \left[\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} x > -3 \\ x > 2 \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} x < -3 \\ x < 2 \end{array} \right. \end{array} \right. ; \quad \left[\begin{array}{l} x > 2 \\ x < -3 \end{array} \right. .$$

Тогда решением $(x+3)(x-2) < 0$ будет $-3 < x < 2$.



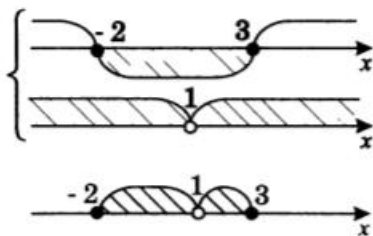
Ответ: $(-\infty; -3) \cup \{-1\} \cup (2; \infty)$.

$$5) \frac{(x-3)(x+2)}{(x-1)^2} \leq 0.$$

$$\left[\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} (x-3)(x+2) \geq 0 \\ (x-1)^2 < 0 \end{array} \right. \quad \emptyset \\ \left\{ \begin{array}{l} (x-3)(x+2) \leq 0 \\ (x-1)^2 > 0 \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Тогда $(x-3)(x+2) \leq 0$ при

$$\left[\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} x-3 \geq 0 \\ x+2 \leq 0 \end{array} \right. ; \quad \left\{ \begin{array}{l} x \geq 3 \\ x \leq -2 \end{array} \right. \quad \emptyset \\ \left\{ \begin{array}{l} x-3 \leq 0 \\ x+2 \geq 0 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} x \leq 3 \\ x \geq -2 \end{array} \right. \quad -2 \leq x \leq 3 \end{array} \right.$$



Ответ: $[-2; 1) \cup (1; 3]$.

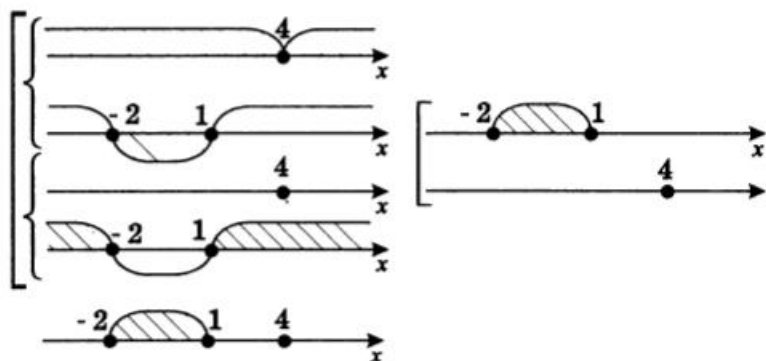
$$6) (4-x)^2(x-1)(x+2) \leq 0.$$

$$\left[\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} (4-x)^2 \geq 0 \\ (x-1)(x+2) \leq 0 \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} (4-x)^2 \leq 0 \\ (x-1)(x+2) \geq 0 \end{array} \right. \end{array} \right.$$

$$(x-1)(x+2) \leq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} x-1 \geq 0 \\ x+2 \leq 0 \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} x-1 \leq 0 \\ x+2 \geq 0 \end{array} \right. \end{array} \right., \quad \text{так как}$$

$$\begin{cases} x \geq 1 \\ x \leq -2 \end{cases} \quad \emptyset$$

$$\begin{cases} x \leq 1 \\ x \geq -2 \end{cases} \quad -2 \leq x \leq 1$$



Ответ: $[-2; 1] \cup \{4\}$.

7) $(x^3 - 9x)^2 + (x^3 - 3x^2)^2 > 0$.

Очевидно, что неравенство справедливо для любых x ,

кроме случая, когда $(x^3 - 9x)^2 + (x^3 - 3x^2)^2 = 0$.

Найдем эти значения x и исключим из решения.

Так как

$$(x^3 - 9x)^2 + (x^3 - 3x^2)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} (x^3 - 9x)^2 = 0 \\ (x^3 - 3x^2)^2 = 0 \end{cases};$$

$$\begin{cases} x(x^2 - 9) = 0 \\ x^2(x - 3) = 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} x = 0 \\ x = 3 \\ x = -3 \\ x = 0 \\ x = 3 \end{cases} \quad \{0; 3\}$$

Исключив эти значения x , получим решение неравенства.

Ответ: $(-\infty; 0) \cup (0; 3) \cup (3; \infty)$.

$$8) \frac{-(x+2)(4+x)}{(x^2-1)^2+(x^2-3x-4)^2} \leq 0.$$

$$\left[\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} -(x+2)(4+x) \geq 0 \\ (x^2-1)^2+(x^2-3x-4)^2 < 0 \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} -(x+2)(4+x) \leq 0 \\ (x^2-1)^2+(x^2-3x-4)^2 > 0 \end{array} \right. \end{array} \right. \quad \emptyset$$

Так как $-(x+2)(4+x) \leq 0$ при

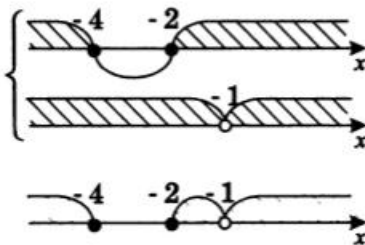
$$\left[\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} x+2 \geq 0 \\ x+4 \geq 0 \\ x+2 \leq 0 \\ x+4 \leq 0 \end{array} \right. ; \quad \left[\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} x \geq -2 \\ x \geq -4 \\ x \leq -2 \\ x \leq -4 \end{array} \right. ; \quad \left[\begin{array}{l} x \geq -2 \\ x \leq -4 \end{array} \right. \end{array} \right.$$

$$(x^2-1)^2+(x^2-3x-4)^2 > 0;$$

$$\forall x \mid (x^2-1)^2+(x^2-3x-4)^2 \neq 0$$

Для этого решим, когда $(x^2-1)^2+(x^2-3x-4)^2 = 0$,
и исключим эти значения x .

$$\left\{ \begin{array}{l} (x^2-1)^2 = 0 \\ (x^2-3x-4)^2 = 0 \end{array} \right. ; \quad \left\{ \begin{array}{l} (x+1)(x-1) = 0 \\ (x-4)(x+1) = 0 \end{array} \right. \cdot \quad x \neq -1$$



Ответ: $(-\infty; -4] \cup [-2; -1) \cup (-1; \infty)$.

$$2. A = \{3; 5; 7; 10\};$$

$$B = \{1; 6; 9; 10; 12\};$$

$$E = \{1; 3; 5; 6; 7; 9; 10; 11; 12\}.$$

Найти:

$$1) A \cap \bar{B} = A \cap \{3; 5; 7\}.$$

$$2) \bar{A} \cup B = \{1; 6; 9; 11; 12\} \cup B = \{1; 6; 9; 10; 11; 12\}.$$

$$3) \overline{A \cup B} = \overline{\{1; 3; 5; 6; 7; 9; 10; 12\}} = \{11\}.$$

$$4) \bar{A} \cap \bar{B} = \{1; 6; 9; 11; 12\} \cap \{3; 5; 7; 11\} = \\ = \{1; 3; 5; 6; 7; 9; 11; 12\}.$$

$$5) \overline{A \cap B} = \overline{A \cap \{3; 5; 7; 11\}} = \overline{\{3; 5; 7\}} = \{1; 6; 9; 10; 11; 12\}.$$

$$6) \overline{A \cup B} = \overline{\{10\}} = \{1; 3; 5; 6; 7; 9; 11; 12\}.$$

$$7) (A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap B) = \{3; 5; 7\} \cup \{1; 6; 9; 12\} = \\ = \{1; 3; 5; 6; 7; 9; 12\}.$$

$$8) (\bar{A} \cup B) \cap (A \cup \bar{B}) = \{1; 6; 9; 10; 11; 12\} \cap \{3; 5; 7; 10; 11\} = \\ = \{10; 11\}.$$

$$9) E \setminus (A \cup B) = E \setminus \{1; 3; 5; 6; 7; 9; 10; 12\} = \{11\}.$$

$$10) E \setminus (A \cap \bar{B}) = E \setminus \{3; 5; 7\} = \{1; 6; 9; 10; 11; 12\}.$$

$$11) (E \setminus A) \cap (E \setminus B) = \{1; 6; 9; 11; 12\} \cap \{3; 5; 7; 11\} = \{11\}.$$

$$12) (E \setminus \bar{A}) \cap (E \setminus \bar{B}) = A \cap B = \{10\}.$$

3. Решите задачу.

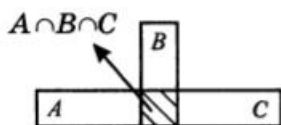
В течение недели в кинотеатре шли фильмы A , B и C .
Каждый из 40 школьников видел либо все три фильма,
либо один из трех.

Фильм A видели 13 школьников.

Фильм B видели 16 школьников.

Фильм C видели 19 школьников.

Сколько школьников видели только по одному фильму?



Так как нет школьников, которые смотрели бы только два фильма,

$$m(A \cap B) = m(A \cap B \cap C);$$

$$m(A \cap C) = m(A \cap B \cap C);$$

$$m(B \cap C) = m(A \cap B \cap C).$$

Таким образом,

$$m(A) + m(B) + m(C) - 2m(A \cap B \cap C) = 40;$$

$$m(A \cap B \cap C) = \frac{13+16+19-40}{2};$$

$$m(A \cap B \cap C) = 4.$$

Тогда $m(A) - m(A \cap B \cap C) = 13 - 4 = 9$ – число школьников, видевших только фильм A ;

Тогда $m(B) - m(A \cap B \cap C) = 16 - 4 = 12$ – число школьников, видевших только фильм B .

Тогда $m(C) - m(A \cap B \cap C) = 19 - 4 = 15$ – число школьников, видевших только фильм C .

Ответ: только фильм A видели 9 школьников;
только фильм B видели 12 школьников;
только фильм C видели 15 школьников;
только по одному фильму видели
36 школьников.

Решение зачетной карточки 1

1. $a_n - \div$

$$\left. \begin{array}{l} a_3 + a_5 = 14 \\ S_{12} = 129 \\ S_n = 195 \end{array} \right\} n = ?$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a_1 + 2d + a_1 + 4d = 14 \\ \frac{2a_1 + (12-1)d}{2} \cdot 12 = 129 \end{array} \right\}; \quad \left\{ \begin{array}{l} a_1 + 3d = 7 \\ 12a_1 + 66d = 129 \end{array} \right\} \cdot 12;$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 12a_1 + 36d = 84 \\ 12a_1 + 66d = 129 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \boxed{2} - \boxed{1}; \\ \hline 30d = 45 \end{array}; \quad \left\{ \begin{array}{l} a_1 + 3d = 7 \\ d = 1,5 \end{array} \right\};$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a_1 = 2,5 \\ d = 1,5 \end{array} \right\}; \quad d = 1,5.$$

Вот теперь можно определить n .

Так как $\frac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n = S_n$,

то $\frac{2 \cdot 2,5 + (n-1)1,5}{2} \cdot n = 195$;

$$n(5 + 1,5n - 1,5) = 390;$$

$$n(10 + 3n - 3) = 780;$$

$$3n^2 + 7n - 780 = 0;$$

$$n_{1,2} = \frac{-7 \pm \sqrt{49 + 9360}}{6} = \frac{-7 \pm 97}{6};$$

$$\left[\begin{array}{l} n = 15 \\ n = -17\frac{1}{3} \notin \mathbb{N} \end{array} \right.$$

Ответ: $n = 15$.

2. Решите уравнение.

$$1 - 5 - 11 - \dots - x = -207.$$

Если проанализировать левую часть уравнения, то ясно, что мы имеем дело с арифметической прогрессией, где

$$\left. \begin{array}{l} a_1 = 1 \\ d = -6 \\ a_n = -x \\ S_n = -207 \end{array} \right\} \text{Найдем, сколько членов у этой прогрессии.}$$

$$n = \frac{a_n - a_1 + d}{d}, \text{ т.е. } \frac{-x - 1 - 6}{-6} = n. \text{ Итак, } n = \frac{7+x}{6}, \text{ но}$$

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} n, \text{ тогда } \frac{1-x}{2} \cdot \frac{7+x}{6} = -207. \text{ Решим это}$$

$$\text{уравнение } x^2 + 6x - 2491 = 0; \quad \begin{cases} x = 47 \\ x = -53. \end{cases}$$

Так как $x > 0$, то $x = 47$.

Ответ: $x = 47$.

3. $b_n - \dots$

$$\left. \begin{array}{l} S_2 = 4 \\ S_3 = 13 \end{array} \right\} S_5 = ?$$

$$\begin{cases} b_1 + b_2 = 4 \\ b_1 + b_2 + b_3 = 13 \end{cases}; \quad \begin{cases} b_1(1+q) = 4 \\ b_1(1+q+q^2) = 13 \end{cases} \quad \boxed{2} : \boxed{1};$$

$$\frac{1+q+q^2}{1+q} = \frac{13}{4}; \quad 4q^2 - 9q - 9 = 0;$$

$$q_{1,2} = \frac{9 \pm \sqrt{81+144}}{8} = \frac{9 \pm 15}{8}; \quad \begin{cases} q = 3 \\ q = -\frac{3}{4} \end{cases}$$

1) Пусть $q = 3$, тогда $b_1(1+3) = 4$; $b_1 = 1$;

$$S_5 = \frac{b_1(1-q^5)}{1-q}, \text{ т.е. } S_5 = \frac{1(1-3^5)}{1-3} = 121.$$

2) Пусть $q = -\frac{3}{4}$, тогда $b_1\left(1 - \frac{3}{4}\right) = 4$; $b_1 = 16$;

$$S_5 = \frac{16\left(1 - \left(-\frac{3}{4}\right)^5\right)}{1 - \left(-\frac{3}{4}\right)}, \text{ т.е. } S_5 = 11\frac{5}{16}.$$

Ответ: 1) $S_5 = 11\frac{5}{16}$ при $q = -\frac{3}{4}$; $b_1 = 16$;

2) $S_5 = 121$ при $q = 3$; $b_1 = 1$.

4. $a_1; a_2; a_3 - \div$

$$\left. \begin{array}{l} a_1; (a_2 - 1); (a_3 + 1) - \div \\ a_1 + a_2 + a_3 = 21 \end{array} \right\} \begin{array}{l} a_1 = ? \\ a_2 = ? \\ a_3 = ? \end{array}$$

$a_2 = a_1 + d$; так как для геометрической прогрессии
 $a_3 = a_1 + 2d$

$b_{n+1}^2 = b_n \cdot b_{n+2}$, то $(a_2 - 1)^2 = a_1(a_3 + 1)$,

т.е. $(a_1 + d - 1)^2 = a_1(a_1 + 2d + 1)$.

Известно, что

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc;$$

$$a_1^2 + d^2 + 1 + 2a_1d - 2a_1 - 2d = a_1^2 + 2a_1d + a_1;$$

$d^2 - 2d - 3a_1 + 1 = 0$, но $a_1 + a_2 + a_3 = 21$, т.е.

$a_1 + a_1 + d + a_1 + 2d = 21$. Получим систему

$$\begin{cases} a_1 + d = 7 \\ d^2 - 2d - 3a_1 + 1 = 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} a_1 = 7 - d \\ d^2 - 2d - 3(7 - d) + 1 = 0 \end{cases}$$

Решение уравнения $d^2 + d - 20 = 0$ $\begin{cases} d = 4 \\ d = -5 \end{cases}$.

1) Пусть $d = 4$, тогда $a_1 = 3$; $a_2 = 7$; $a_3 = 11$.

2) Пусть $d = -5$, тогда $a_1 = 12$, т.е. $a_1 = 12$;

$$a_2 = 7; a_3 = 2.$$

Ответ: 1) $a_1 = 3$; $a_2 = 7$; $a_3 = 11$;

$$2) a_1 = 12; a_2 = 7; a_3 = 2.$$

5. $a_n = -2n^3 + 15n^2$.

Найти наибольший член последовательности.

Вычислим несколько первых значений и попытаемся понять характер изменений последовательности.

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= -2 + 15 = 13 \\ a_2 &= -16 + 60 = 44 \\ a_3 &= -2 \cdot 27 + 135 = 81 \\ a_4 &= -2 \cdot 64 + 240 = 112 \end{aligned} \right|$$

Похоже, последовательность возрастает.

Вычислим на всякий случай еще несколько значений.

$$a_5 = -2 \cdot 125 + 375 = 125;$$

$$a_6 = -2 \cdot 216 + 540 = 108.$$

Вот неожиданность. Значит последовательность стала убывать. Если подумать, то это закономерно.

Действительно, $a_n = k_n + t_n$, где $k_n = -2n^3$, явно убывающая для $\forall n \in \mathbb{N}$; $t_n = 15n^2$ явно возрастающая для $\forall n \in \mathbb{N}$.

Очевидно, что k_n убывает быстрее, чем t_n возрастает.

Тогда для $\forall n > 5$ последовательность a_n убывает. Итак,

$a_5 = 125$ есть наибольшее значение члена последовательности.

$$6. x(x^4 - 2(a+2)x^2 + a^2) = 0, \text{ где } x_1; x_2; x_3; x_4; x_5 - \dots$$

При каких значениях параметра a это возможно?

Найти корни при данном значении параметра a .

Так как один из корней равен нулю, возможны разные случаи.

$$x_2 = d$$

$$x_3 = 2d$$

$$1) \text{ Пусть } x_1 = 0, \text{ тогда } x_4 = 3d.$$

$$x_5 = 4d$$

$$\text{Для } x^4 - 2(a+2)x^2 + a^2 = 0$$

$$а) f(d) = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} d^4 - 2(a+2)d^2 + a^2 = 0 \\ 16d^4 - 8(a+2)d^2 + a^2 = 0 \end{array} \right. \cdot 16$$

$$б) f(2d) = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} 16d^4 - 8(a+2)d^2 + a^2 = 0 \\ 16d^4 - 32(a+2)d^2 + 16a^2 = 0 \end{array} \right.$$

$$\frac{-\left\{ \begin{array}{l} 16d^4 - 32(a+2)d^2 + 16a^2 = 0 \\ 16d^4 - 8(a+2)d^2 + a^2 = 0 \end{array} \right.}{-24(a+2)d^2 + 15a^2 = 0}; \quad d^2 = \frac{5a^2}{8(a+2)}.$$

Подставим в первое уравнение системы

$$\text{и получим } \left(\frac{5a^2}{8(a+2)} \right)^2 - 2(a+2) \cdot \frac{5a^2}{8(a+2)} + a^2 = 0.$$

Преобразовывая

$$25a^4 - 80(a+2)^2 \cdot a^2 + 64(a+2)^2 a^2 = 0$$

и полагая $a \neq 0$, имеем

$$25a^2 - 16(a+2)^2 = 0; \quad \left[\begin{array}{l} (5a + 4(a+2)) = 0 \\ 5a - 4(a+2) = 0 \end{array} \right.;$$

$$\left[\begin{array}{l} a = -\frac{8}{9} \\ a = 8 \end{array} \right.$$

Если $a = 0$, то $x^2(x^2 - 4) = 0$. Есть только три корня.

$$а) a = -\frac{8}{9}, \text{ тогда } x^4 - 2 \cdot \frac{10}{9}x^2 + \frac{64}{81} = 0;$$

$$81x^4 - 180x^2 + 64 = 0;$$

$$(x^2)_{1,2} = \frac{90 \pm \sqrt{90^2 - 81 \cdot 64}}{81} = \frac{90 \pm 9 \cdot 6}{81};$$

$$\begin{cases} x^2 = \frac{16}{9} \\ x^2 = \frac{4}{9} \end{cases}, \text{ т.е. в итоге имеем } -\frac{4}{3}; -\frac{2}{3}; 0; \frac{2}{3}; \frac{4}{3}.$$

$$\text{б) } a = 8, \text{ тогда } x^4 - 20x^2 + 64 = 0; \quad \begin{cases} x^2 = 16 \\ x^2 = 4 \end{cases};$$

т.е. $-4; -2; 0; 2; 4$.

$$x_1 = -d$$

$$2) \text{ Пусть } x_2 = 0, \text{ тогда } \begin{cases} x_3 = d \\ x_4 = 2d \\ x_5 = 3d \end{cases}, \text{ решение аналогичное.}$$

Вывод: при любых случаях всегда один из корней равен d или $2d$.

Ответ: 1) при $a = -\frac{8}{9}$ корни этого уравнения

$$-\frac{4}{3}; -\frac{2}{3}; 0; \frac{2}{3}; \frac{4}{3};$$

2) при $a = 8$ корни этого уравнения

$$-4; -2; 0; 2; 4.$$

7. $b_n - \dots$

$$\begin{cases} b_1 + b_2 + b_3 = 14 \\ b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 = 84 \end{cases} \quad \begin{cases} b_1 = ? \\ q = ? \end{cases}$$

$$\text{Так как } b_n = b_1 \cdot q^{n-1}, \text{ то } \begin{cases} b_1 + b_1q + b_1q^2 = 14 \\ b_1^2 + b_1^2q^2 + b_1^2q^4 = 84 \end{cases};$$

$$\begin{cases} b_1(1 + q + q^2) = 14 \\ b_1^2(1 + q^2 + q^4) = 84 \end{cases}; \quad \boxed{2} : \boxed{1};$$

$$\begin{cases} b_1(1 + q + q^2) = 14 \\ \frac{b_1^2(1+q^2+q^4)}{b_1(1+q+q^2)} = 6 \end{cases};$$

$$\begin{cases} b_1(1 + q + q^2) = 14 \\ b_1(1 - q - q^2) = 6 \end{cases}; \quad \boxed{1} : \boxed{2};$$

$$\begin{cases} b_1(1 + q + q^2) = 14 \\ \frac{1 + q + q^2}{1 - q + q^2} = \frac{7}{3} \end{cases};$$

$$\begin{cases} b_1(1 + q + q^2) = 14 \\ 3 + 3q + 3q^2 = 7 - 7q + 7q^2 \end{cases}$$

тогда из второго уравнения получим $4q^2 - 10q + 4 = 0$.

Решая, находим $\begin{cases} q = 2 \\ q = \frac{1}{2} \end{cases}$.

1) Пусть $q = 2$, тогда $b_1 = \frac{14}{1+2+2^2}$; $b_1 = 2$.

2) Пусть $q = \frac{1}{2}$; тогда $b_1 = \frac{14}{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}} = 8$.

Ответ: 1) $q = 2$; $b_1 = 2$; 2) $q = \frac{1}{2}$; $b_1 = 8$.

8. $x^3 + 3x^2 - 6x + a = 0$. Решите уравнение, если корни образуют геометрическую прогрессию. При каких значениях параметра a это возможно?

$$(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) = x^3 + 3x^2 - 6x + a,$$

где $x_1; x_2; x_3$ - корни.

$$\begin{aligned} & (x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 \cdot x_2)(x - x_3) = \\ & = x^3 - (x_1 + x_2 + x_3)x^2 + (x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)x - x_1x_2x_3. \end{aligned}$$

Тогда $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -3 \\ x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_3 + x_2 \cdot x_3 = -6. \text{ Эту систему} \\ x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = -a \end{cases}$

можно было получить сразу, если знать теорему Виета для кубического уравнения.

Для $a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 = 0$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{a_1}{a_0} \\ x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_3 + x_2 \cdot x_3 = \frac{a_2}{a_0}, \\ x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = -\frac{a_3}{a_0} \end{cases}$$

где $x_1; x_2; x_3$ — корни.

Так как $x_2 = x_1 \cdot q$,
 $x_3 = x_1 \cdot q^2$, то систему можно записать

$$\begin{cases} x_1 + x_1q + x_1q^2 = -3 \\ x_1^2q + x_1^2q^2 + x_1^2q^3 = -6 \quad \boxed{2} : \boxed{1}. \text{ Получим} \\ x_1^3q^3 = -a \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1(1 + q + q^2) = -3 \\ x_1q = 2 \\ (x_1q)^3 = -a \end{cases}, \text{ тогда } a = -8;$$

$$\frac{1+q+q^2}{q} = -\frac{3}{2}; \quad \text{тогда } 2q^2 + 5q + 2 = 0; \quad \begin{cases} q = -2 \\ q = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$a = -8$, т.е. в данном случае

$$1) \quad q = -2; \quad x_1 = \frac{-3}{1-2+4} = -1; \quad x_2 = 2; \quad x_3 = -4;$$

$$\text{т.е. } x_1 = -1; \quad x_2 = 2; \quad x_3 = -4;$$

$$2) \quad q = -\frac{1}{2}; \quad x_1 = \frac{-3}{1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}} = -4; \quad x_2 = 2; \quad x_3 = -1.$$

Ответ: при $a = -8$

$$1) \quad x_1 = -1; \quad x_2 = 2; \quad x_3 = -4;$$

$$2) \quad x_1 = -4; \quad x_2 = 2; \quad x_3 = -1.$$

9. Вычислить $\sqrt{\frac{4444444444}{10 \text{ цифр}} - \frac{88888}{5 \text{ цифр}}}$.

$$\begin{aligned} & 2\sqrt{1111111111 - 2 \cdot 11111} = \\ & = 2\sqrt{1 + 10 + 10^2 + 10^3 + \dots + 10^9 - 2(1 + 10 + 10^2 + 10^3 + 10^4)} = \\ & = 2\sqrt{\frac{1(1-10^{10})}{1-10} - 2\left(\frac{1-10^5}{1-10}\right)} = 2\sqrt{\frac{10^{10} - 2 \cdot 10^5 + 1}{9}} = \\ & = \frac{2}{3}(10^5 - 1) = \frac{2 \cdot 99999}{3} = 66666. \end{aligned}$$

10. $b_n - \dots$

$$\begin{cases} b_1 - b_5 = 1,92 \\ b_1 + b_3 = 2,4 \end{cases} \quad |q| < 1;$$

S – сумма бесконечно убывающей данной геометрической прогрессии.

Вычислите $\frac{S^2}{b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2}$

$$\begin{cases} b_1(1 - q^4) = 1,92 \\ b_1(1 + q^2) = 2,4 \end{cases} \quad \boxed{1} : \boxed{2};$$

$$\begin{cases} b_1(1 - q^2) = 0,8 \\ b_1(1 + q^2) = 2,4 \end{cases} \quad \boxed{2} : \boxed{1};$$

$$\begin{cases} \frac{1 + q^2 \cdot b_1}{1 - q^2} = 3 \\ b_1(1 + q^2) = 2,4 \end{cases} \quad \boxed{2} : \boxed{1}; \quad \begin{cases} 1 - q^2 = \frac{4}{5}; \\ b_1 = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} q^2 = \frac{1}{5}; \\ b_1 = 2 \end{cases}$$

$S = \frac{b_1}{1-q}$ – сумма бесконечно убывающей прогрессии.

1) Для $b_1 = 2$; $q = \frac{\sqrt{5}}{5}$;

$$S = \frac{2}{1 - \frac{\sqrt{5}}{5}} = \frac{10}{5 - \sqrt{5}} = \frac{5 + \sqrt{5}}{2};$$

$$b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + \dots + b_n^2 + \dots = b_1^2(1 + q^2 + q^4 + \dots + q^{2n} + \dots);$$

$$S_1 = \frac{b_1^2}{1 - q^2} = \frac{2^2}{1 - \frac{1}{5}} = \frac{20}{4} = 5;$$

$$\frac{S^2}{S_1} = \frac{0,25(30 + 10\sqrt{5})}{5} = 1,5 + 0,5\sqrt{5}.$$

2) Если $b_1 = 2$; $q = -\frac{\sqrt{5}}{5}$, то так как $q < 0$, то последовательность не является убывающей (она колеблющаяся).

Ответ: $\frac{S^2}{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + \dots} = 1,5 + 0,5\sqrt{5}.$

Решение зачетной карточки 2

1. $a_n - \div$

$$\left. \begin{array}{l} S_n - a_2 = 103 \\ S_n - a_n = 88 \\ S_n - a_n - a_{n-1} = 87\frac{1}{2} \end{array} \right| n = ?$$

$$\left\{ \begin{array}{l} S_n - a_2 = 103 \\ S_n - a_n = 88 \\ S_n - a_2 - a_{n-1} = 87,5 \end{array} \right. \quad \boxed{1} - \boxed{2};$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a_n - a_2 = 15 \\ S_n - a_n = 88 \\ S_n - (a_1 + a_n) = 87,5 \end{array} \right. \quad \boxed{2} - \boxed{3};$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a_n - a_2 = 15 \\ a_1 = 0,5 \\ \frac{(a_1 + a_n)}{2} n - (a_1 + a_n) = 87,5 \end{array} \right. ;$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a_1 + (n-1)d - a_1 - d = 15 \\ a_1 = 0,5 \\ (a_1 + a_n)(n-2) = 175 \end{array} \right. ;$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (n-2)d = 15 \\ a_1 = 0,5 \\ (2a_1 + (n-1)d)(n-2) = 175 \end{array} \right. ;$$

$$\left\{ \begin{array}{l} d = \frac{15}{n-2} \\ a_1 = 0,5 \\ \left(1 + \frac{(n-1)15}{n-2}\right)(n-2) = 175 \end{array} \right. ;$$

$$\left\{ \begin{array}{l} d = \frac{15}{n-2} \\ a_1 = 0,5 \\ n - 2 + 15n - 15 = 175 \end{array} \right. ; \quad \left\{ \begin{array}{l} d = \frac{15}{n-2} \\ a_1 = 0,5 \\ 16n = 192 \end{array} \right. ; \quad n = 12.$$

Ответ: $n = 12$.

2. Решите уравнение

$$x - 1 + x - 3 + x - 5 + \dots + x - 27 = 70.$$

В записи левой части просматривается арифметическая

прогрессия. Полагая, что это так, имеем
$$\left\{ \begin{array}{l} a_1 = x - 1 \\ a_n = x - 27 \\ d = -2 \end{array} \right.$$

тогда $n = \frac{a_n - a_1 + d}{d}$; $n = \frac{x - 27 - (x - 1) + (-2)}{-2}$; $n = 14$;

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = 70, \text{ т.е. } \frac{x - 1 + x - 27}{2} \cdot 14 = 70;$$

$$x - 1 + x - 27 = 10;$$

$$2x = 38;$$

$$x = 19;$$

Ответ: $x = 19$.

3. $b_n - \div \div$

$$\left\{ \begin{array}{l} b_1 + b_4 = 11\frac{2}{3} \\ b_2 + b_3 = 10 \end{array} \right. S_5 = ?$$

Преобразуем:

$$\left\{ \begin{array}{l} b_1 + b_1 \cdot q^3 = 11\frac{2}{3} \\ b_1 q + b_1 q^2 = 10 \end{array} \right. ; \quad \left\{ \begin{array}{l} b_1(1 + q^3) = 11\frac{2}{3} \\ b_1 q(1 + q) = 10 \end{array} \right. \quad \boxed{1} : \boxed{2};$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1+q^3}{q(1+q)} = \frac{35}{30} \\ b_1 q(1+q) = 10 \end{array} \right. ; \quad \left\{ \begin{array}{l} 1 - q + q^2 = \frac{7}{6}q \\ b_1 q(1+q) = 10 \end{array} \right.;$$

$$\begin{cases} 6q^2 - 13q + 6 = 0; \\ b_1q(1+q) = 10 \end{cases}; \quad \begin{cases} q = \frac{3}{2} \\ q = \frac{2}{3} \\ b_1q(1+q) = 10 \end{cases};$$

$$1) \begin{cases} q = 1,5 \\ b_1 = 2\frac{2}{3} \end{cases}; \quad S_5 = \frac{\frac{8}{3} \cdot \left(1 - \left(\frac{3}{2}\right)^5\right)}{1 - \frac{3}{2}} = 35\frac{1}{6};$$

$$2) \begin{cases} q = \frac{2}{3}; \\ b_1 = 9 \end{cases}; \quad S_5 = \frac{9 \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^5\right)}{1 - \frac{2}{3}} = 23\frac{4}{9}.$$

Ответ: 1) $S_5 = 23\frac{4}{9}$ при $q = \frac{2}{3}$; $b_1 = 9$;

2) $S_5 = 35\frac{1}{6}$ при $q = 1,5$; $b_1 = 2\frac{2}{3}$.

4. $b_1; b_2; b_3 - \div \div$

$$\begin{array}{l} (b_3 - 4); b_2; b_1 - \div \div \\ b_1 + b_2 + b_3 = 28 \end{array} \quad \begin{array}{l} b_1 = ? \\ b_2 = ? \\ b_3 = ? \end{array}$$

Так как для арифметической прогрессии $b_2 = \frac{b_1 + b_3 - 4}{2}$,
то $2b_1q = b_1 + b_1q^2 - 4$. Система приобретает вид

$$\begin{cases} b_1(1 - 2q + q^2) = 4; \\ b_1 + b_1q + b_1q^2 = 28; \end{cases}$$

$$\begin{cases} b_1(1 - q)^2 = 4 \\ b_1(1 + q + q^2) = 28 \end{cases} \quad \boxed{1} : \boxed{2}; \quad \frac{1+q+q^2}{1-2q+q^2} = 7,$$

т.е. $7q^2 - 14q + 7 = 1 + q + q^2$;

$$6q^2 - 15q + 6 = 0.$$

Сокращая, имеем $2q^2 - 5q + 2 = 0$;

$$q = 2; \quad b_1(1 - 2)^2 = 4; \quad b_1 = 4;$$

$$q = \frac{1}{2}; \quad b_1\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) = 28; \quad b_1 = 16;$$

$$1) \quad b_1 = 4; \quad q = 2; \quad b_2 = 8; \quad b_3 = 16;$$

$$2) \quad b_1 = 16; \quad q = \frac{1}{2}; \quad b_2 = 8; \quad b_3 = 4.$$

$$\text{Ответ: } 1) \quad b_1 = 4; \quad b_2 = 8; \quad b_3 = 16;$$

$$2) \quad b_1 = 16; \quad b_2 = 8; \quad b_3 = 4.$$

5. $a_n = -n^3 + 8n^2$. Найдите наибольший член последовательности.

Интересно, как же это сделать? Вычислять подряд все значения $a_1; a_2; a_3; \dots a_n$ это смешно. Попробуем

вначале проанализировать последовательность a_n .

Очевидно, что $k_n = -n^3$ убывает для $\forall n \in \mathbb{N}$, а $t_n = 8n^2$ возрастает для $\forall n \in \mathbb{N}$, но k_n — убывает, конечно, быстрее, чем t_n возрастает.

Поэтому попробуем вычислить значения a_n и выяснить, с какого номера a_n будет убывать. Итак,

$$a_1 = 7;$$

$$a_2 = -8 + 32 = 24;$$

$$a_3 = -27 + 8 \cdot 9 = 45;$$

$$a_4 = -64 + 8 \cdot 16 = 64;$$

$$a_5 = -125 + 8 \cdot 25 = 75;$$

$$a_6 = -216 + 8 \cdot 36 = 72.$$

Ответ: $a_5 = 75$ — наибольший член последовательности

$$a_n = -n^3 + 8n^2.$$

$$6. x^4 + (a - 3)x^2 + (a + 10)^2 = 0.$$

При каких a уравнение имеет четыре корня, образующие арифметическую прогрессию? Найти эти корни.

Так как по теореме Виета для уравнений 4-й степени

$$\left(\begin{array}{l} a_0x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -\frac{a_1}{a_0} \\ \dots\dots\dots \\ x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 = \frac{a_4}{a_0} \end{array} \right)$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$$

$$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 = (a + 10)^2, \text{ то}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_1 + d + x_1 + 2d + x_1 + 3d = 0 \\ x_1(x_1 + d)(x_1 + 2d)(x_1 + 3d) = (10 + a)^2 \end{cases}$$

$$\text{Тогда } \begin{cases} x_1^2 = 3(a + 10) \\ x_1^2 = -3(a + 10) \end{cases}$$

Подставляя x_1^2 в уравнение, получим

$$\begin{cases} [3(a + 10)]^2 + (a - 3)3(a + 10) + (a + 10)^2 = 0; \\ [3(a + 10)]^2 - (a - 3)3(a + 10) + (a + 10)^2 = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 9(a + 10) + 3(a - 3) + a + 10 = 0; \\ 9(a + 10) - 3(a - 3) + a + 10 = 0; \end{cases} \begin{cases} a = -7 \\ a = -15\frac{4}{7} \end{cases}$$

1) Пусть $a = -7$. Тогда уравнение принимает вид:

$$x^4 - 10x^2 + 9 = 0; \begin{cases} x^2 = 9 \\ x^2 = 1 \end{cases}; \begin{cases} x = 3 \\ x = 1 \\ x = -1 \\ x = -3 \end{cases}$$

и корни образуют арифметическую прогрессию.

2) Пусть $a = -15\frac{4}{7}$, тогда

$$x^4 + \left(-15\frac{4}{7} - 3\right)x^2 + \left(-15\frac{4}{7} + 10\right)^2 = 0;$$

$$x^4 - \frac{130}{7}x^2 + \left(\frac{39}{7}\right)^2 = 0; \quad 49x^4 - 910x^2 + 39^2 = 0;$$

$$(x^2)_{1,2} = \frac{455 \pm \sqrt{455^2 - 49 \cdot 39^2}}{49} =$$

$$= \frac{5 \cdot 91 \pm \sqrt{5^2 \cdot 13^2 \cdot 7^2 - 7^2 \cdot 13^2 \cdot 3^2}}{49} =$$

$$= \frac{5 \cdot 91 \pm 13 \cdot 7 \sqrt{25 - 9}}{49} = \frac{5 \cdot 13 \pm 13 \cdot 4}{7};$$

$$\begin{cases} x^2 = \frac{13 \cdot 9}{7} \\ x^2 = \frac{13}{7} \end{cases},$$

тогда

$$\begin{cases} x = 3\sqrt{\frac{13}{7}} \\ x = \sqrt{\frac{13}{7}} \\ x = -\sqrt{\frac{13}{7}} \\ x = -3\sqrt{\frac{13}{7}} \end{cases}.$$

Ответ: 1) при $a = -7$ $x_1 = 3$; $x_2 = 1$; $x_3 = -1$; $x_4 = -3$;

2) при $a = -15\frac{4}{7}$ $x_1 = 3\sqrt{\frac{13}{7}}$; $x_2 = \sqrt{\frac{13}{7}}$;

$x_3 = -\sqrt{\frac{13}{7}}$; $x_4 = -3\sqrt{\frac{13}{7}}$.

7. $b_n - \dots$

$$\begin{cases} b_1 + b_2 + b_3 = 21 \\ b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 = 189 \end{cases} \quad \begin{cases} b_1 = ? \\ q = ? \end{cases}$$

$$\begin{cases} b_1 + b_1q + b_1q^2 = 21 \\ b_1^2 + b_1^2q^2 + b_1^2q^4 = 189 \end{cases};$$

$$\begin{cases} b_1(1 + q + q^2) = 21 \\ b_1^2(1 + q^2 + q^4) = 189 \end{cases} \quad \boxed{2} : \boxed{1};$$

$$\begin{cases} \frac{b_1(1+q^2+q^4)}{1+q+q^2} = 9 \\ b_1(1 + q + q^2) = 21 \end{cases},$$

$$\text{т. е.} \quad \begin{cases} b_1(1 - q + q^2) = 9 \\ b_1(1 + q + q^2) = 21 \end{cases} \quad \boxed{2} : \boxed{1};$$

$$\begin{cases} \frac{1+q+q^2}{1-q+q^2} = \frac{7}{3} \\ b_1(1 + q + q^2) = 21 \end{cases}.$$

Решим первое уравнение $3 + 3q + 3q^2 = 7 - 7q + 7q^2$.

$$4q^2 - 10q + 4 = 0; \quad \begin{cases} q = 2 \\ q = \frac{1}{2} \end{cases}.$$

$$1) \quad q = 2; \quad b_1(1 + 2 + 2^2) = 21; \quad b_1 = 3;$$

$$2) \quad q = \frac{1}{2}; \quad b_1\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) = 21; \quad b_1 = 12;$$

Ответ: 1) $q = 2; \quad b_1 = 3;$ 2) $q = \frac{1}{2}; \quad b_1 = 12.$

$$8. \quad x^3 - 3x^2 - 6x - b = 0.$$

Решите уравнение, если корни образуют геометрическую прогрессию.

При каких b это возможно?

Так как по теореме Виета для

$$a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 = 0$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{a_1}{a_0} \\ x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_3 + x_2 \cdot x_3 = \frac{a_2}{a_0}, \text{ то} \\ x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = -\frac{a_3}{a_0} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_3 + x_2 \cdot x_3 = -6. \\ x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = b \end{cases}$$

Учитывая, что $x_1; x_2; x_3 = \dots$,

$$\begin{cases} x_1 + x_1q + x_1q^2 = 3 \\ x_1^2q + x_1^2q^2 + x_1^2q^3 = -6; \\ x_1^3q^3 = b \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1(1 + q + q^2) = 3 \\ x_1^2q(1 + q + q^2) = -6 \quad \boxed{2} : \boxed{1}; \quad x_1q = -2, \\ (x_1q)^3 = b \end{cases}$$

тогда $b = -8$.

Уравнение приобретает вид

$$x^3 - 3x^2 - 6x + 8 = 0; \quad f(-2) = 0.$$

$$\begin{array}{r} x^3 - 3x^2 - 6x + 8 \quad \underline{ x + 2} \\ x^3 + 2x^2 \phantom{\underline{ x + 2}} \\ \hline -5x^2 - 6x \phantom{\underline{ x + 2}} \\ -5x^2 - 10x \phantom{\underline{ x + 2}} \\ \hline 4x + 8 \phantom{\underline{ x + 2}} \\ \underline{4x + 8} \\ 0 \end{array}$$

Ответ: при $b = -8$

$$x_1 = 1; \quad x_2 = -2; \quad x_3 = 4; \quad (q = -2).$$

9. Вычислите $\sqrt{9999999999 - 2 \cdot 99999}$.

Так как

$$9999999999 = 9 \cdot 10^9 + 9 \cdot 10^8 + 9 \cdot 10^7 + \dots + 9 \cdot 10^1 + 9 \cdot 10^0 =$$

$$= \frac{9(1-10^{10})}{1-10}$$

$$99999 = 9 \cdot 10^0 + 9 \cdot 10^1 + 9 \cdot 10^2 + 9 \cdot 10^3 + 9 \cdot 10^4 =$$

$$= \frac{9(1-10^5)}{1-10} \quad \text{и} \quad \sqrt{9999999999 - 2 \cdot 99999} =$$

$$= \sqrt{\frac{9(1-10^{10}) - 2 \cdot 9(1-10^5)}{1-10}} = \sqrt{\frac{9(10^{10} - 2 \cdot 10^5 + 1)}{9}} =$$

$$= 10^5 - 1 = 99999.$$

Ответ: $\sqrt{9999999999 - 2 \cdot 99999} = 99999$.

10. $b_n - \dots$; $n \rightarrow \infty$; $|q| < 1$

$S = 9$ (сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии)

$$\underline{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + \dots = 40,5} \quad b_1^3 + b_2^3 + b_3^3 + \dots = ?$$

$$1) S = \frac{b_1}{1-q}; \quad \frac{b_1}{1-q} = 9;$$

$$2) S_1 = b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2 + \dots;$$

$$S_1 = \frac{b_1^2}{1-q^2} = 40,5.$$

Решим систему

$$\begin{cases} b_1 = 9(1-q) \\ b_1^2 = \frac{81}{2}(1-q^2) \end{cases} \quad \boxed{2} : \boxed{1};$$

$$\begin{cases} b_1 = 9(1 - q) \\ b_1 = \frac{9}{2}(1 + q) \end{cases}; \quad 9(1 - q) = \frac{9}{2}(1 + q).$$

$$\text{Значит } \begin{cases} q = \frac{1}{3}; \\ b_1 = 6 \end{cases}$$

$$3) \quad S_2 = b_1^3 + b_2^3 + b_3^3 + \dots + b_n^3 + \dots;$$

$$S_2 = \frac{b_1^3}{1 - q^3};$$

$$S_2 = \frac{6^3}{1 - \frac{1}{3^3}} = \frac{216 \cdot 27}{26} = 224 \frac{4}{13}.$$

$$\text{Ответ: } b_1^3 + b_2^3 + b_3^3 + \dots + b_n^3 + \dots = 224 \frac{4}{13}.$$

Решение зачетной карточки 3

1. $a_n - \div$

$$\left. \begin{array}{l} S_3 = 6 \\ a_1 + a_3 + a_5 = 10,5 \end{array} \right\} \begin{array}{l} d = ? \\ a_1 = ? \end{array}$$

$$\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 = 6 \\ a_1 + a_3 + a_5 = 10,5; \\ a_1 + a_1 + d + a_1 + 2d = 6 \\ a_1 + a_1 + 2d + a_1 + 4d = 10,5; \\ \left\{ \begin{array}{l} a_1 + d = 2 \\ a_1 + 2d = 3,5 \end{array} \right. \begin{array}{l} \text{[2]} - \text{[1]}; \\ \left\{ \begin{array}{l} d = 1,5 \\ a_1 = 0,5 \end{array} \right. \end{array} \end{cases}$$

Ответ: $d = 1,5$; $a_1 = 0,5$.

2. $x^2 - 4x + a = 0$, где $x_1; x_2$ - корни;

$x^2 - 36x + b = 0$, где $x_3; x_4$ - корни;

$$x_1; x_2; x_3; x_4 - \div \quad \begin{array}{l} a = ? \\ b = ? \end{array}$$

По теореме Виета $\begin{cases} x_3 + x_4 = 36; \\ x_3 \cdot x_4 = b \end{cases}; \quad \begin{cases} x_1 + x_2 = 4 \\ x_1 \cdot x_2 = a \end{cases}$.

Так как $\begin{cases} x_2 = x_1 \cdot q \\ x_3 = x_1 \cdot q^2, \\ x_4 = x_1 \cdot q^3 \end{cases}$, то $\begin{cases} x_1(1 + q) = 4 \\ x_1 q^2 = 1 + q \end{cases} \quad \text{[2]} : \text{[1]};$

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1(1 + q) = 4 \\ x_1^2 q = a \\ x_1 q^2(1 + q) = 36; \\ x_1^2 q^5 = b \end{array} \right\}; \quad \left\{ \begin{array}{l} q^2 = 9 \\ x = \frac{4}{1+q} \end{array} \right\}; \quad \left[\begin{array}{l} q = 3 \\ x = 1 \\ q = -3 \\ x = -2 \end{array} \right]$$

$$a = x_1^2 q = 3; \quad b = x_1^2 q^5 = 3^5 = 243;$$

$$2) \quad x = -2; \quad q = -3;$$

$$a = x_1^2 q = -12; \quad b = x_1^2 q^5 = -4 \cdot 3^5 = -972.$$

$$\text{Ответ: } 1) \quad a = 3; \quad b = 243;$$

$$2) \quad a = -12; \quad b = -972.$$

3. Найти сумму всех двузначных чисел, которые не делятся ни на три, ни на четыре.

На самом деле для решения задачи необходимо выяснить сумму двузначных чисел, делящихся или на три, или на четыре, а затем исключить их из суммы всех двузначных чисел.

$$1) \quad \left. \begin{array}{l} a_1 = 12 \\ a_n = 99 \\ a = 3 \end{array} \right\} n = \frac{a_n - a_1 + d}{d}; \quad n = \frac{99 - 12 + 3}{3} = 30;$$

$$S_{30} = \frac{12+99}{2} \cdot 30 = 111 \cdot 15 = 1665.$$

A – множество двузначных чисел, кратных трем;
 $S(A)$ – сумма всех двузначных чисел, кратных трем.
 $S(A) = 1665.$

$$2) \quad \left. \begin{array}{l} a_1 = 12 \\ a_n = 96 \\ a = 4 \end{array} \right\} n = \frac{a_n - a_1 + d}{d}; \quad n = \frac{96 - 12 + 4}{4} = 22;$$

$$S_{22} = \frac{12+96}{2} \cdot 22 = 108 \cdot 11 = 1188.$$

B – множество двузначных чисел, кратных четырем;
 $S(B)$ – сумма всех двузначных чисел, кратных четырем;

$A \cap B$ – множество двузначных чисел, кратных 12.

$$3) \left. \begin{array}{l} a_1 = 12 \\ a_n = 96 \\ a = 12 \end{array} \right\} n = \frac{96-12+12}{12} = 8;$$

$$S_8 = \frac{12+96}{2} \cdot 8 = 108 \cdot 4 = 432;$$

$S(A \cap B)$ – сумма всех двузначных чисел, кратных двенадцати.

Так как $m(A \cup B) = m(A) + m(B) - m(A \cap B)$, то

$$S(A \cup B) = S(A) + S(B) - S(A \cap B);$$

$$S(A \cup B) = 1665 + 1188 - 432 = 2421;$$

$S(A \cup B)$ – сумма всех двузначных чисел, кратных или трем, или четырем.

$$4) \left. \begin{array}{l} a_1 = 10 \\ a_n = 99 \\ a = 1 \end{array} \right\} n = \frac{99-10+1}{1} = 90;$$

$$S_{89} = \frac{10+99}{2} \cdot 90 = 4905 - \text{сумма всех двузначных чисел.}$$

- 5) $4905 - 2421 = 2484$ – сумма всех двузначных чисел, не делящихся ни на три, ни на четыре.

Ответ: искомая сумма 2484.

4. Решите уравнение

$$\frac{2x}{2x+1} + \frac{2x-1}{2x+1} + \frac{2x-2}{2x+1} + \dots + \frac{1}{2x+1} = 3.$$

$$\frac{2x}{2x+1} + \frac{2x-1}{2x+1} + \frac{2x-2}{2x+1} + \dots + \frac{1}{2x+1} = 3; \quad x \neq -\frac{1}{2};$$

$$2x + (2x - 1) + (2x - 2) + \dots + 1 = 3(2x + 1).$$

Очевидно, что в левой части арифметическая прогрессия

$$\left. \begin{array}{l} a_1 = 2x \\ a_n = 1 \\ d = -1 \end{array} \right\} n = \frac{a_n - a_1 + d}{d}; \quad \text{т. е. } n = \frac{1 - 2x - 1}{-1} = 2x;$$

$$\frac{2x+1}{2} \cdot 2x = 3(2x+1);$$

$$2x^2 + x = 6x + 3;$$

$$x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25+24}}{4} = \frac{5 \pm 7}{4}; \quad \begin{cases} x = 3 \\ x = -\frac{1}{2} \notin D(y) \end{cases}$$

Ответ: $x = 3$.

5. $b_n - \dots$

$$\left. \begin{array}{l} n = 52 \\ S_1 = b_1 + b_3 + b_5 + \dots + b_{61} = 28 \\ S_2 = b_2 + b_4 + \dots + b_{52} = 7 \end{array} \right\} q = ?$$

$$\begin{cases} S_1 = b_1(1 + q^2 + q^4 + \dots + q^{50}) = 28 \\ S_2 = b_1q(1 + q^2 + q^4 + \dots + q^{50}) = 7 \end{cases} \quad \text{[2] : [1];}$$

$$q = \frac{1}{4}.$$

Ответ: $q = \frac{1}{4}$.

6. $5^{5x}; 10^{\frac{3x^2+3}{4}}; 32^x - \dots \quad x = ?$

Так как мы имеем дело с геометрической прогрессией,

$$\text{то } b_{n+1}^2 = b_n \cdot b_{n+2}, \text{ т.е. } \left(10^{\frac{3x^2+3}{4}}\right)^2 = 5^{5x} \cdot 2^{5x}.$$

$$\text{Тогда } 10^{\frac{3x^2+3}{2}} = 5^{5x} \cdot 2^{5x}, \text{ т.е. } \frac{3x^2+3}{2} = 5x;$$

$$3x^2 - 10x + 3 = 0; \quad \begin{cases} x = 3 \\ x = \frac{1}{3} \end{cases}$$

Ответ: $x = 3; x = \frac{1}{3}$.

$$7. 1 + 11 + 111 + \dots$$

$$S_n = ?$$

Данный ряд чисел можно представить так:

$$S_n = 1 + (1 + 10) + (1 + 10 + 10^2) + (1 + 10 + 10^2 + 10^3) + \dots \\ \dots + (1 + 10 + \dots + 10^{n-1}).$$

Очевидно, мы имеем дело с суммой членов геометрической прогрессии.

$$S_n = \frac{1(1-10^1)}{1-10} + \frac{1(1-10)^2}{1-10} + \frac{1(1-10^3)}{1-10} + \dots + \frac{1(1-10^n)}{1-10}.$$

Запишем в обратном порядке.

$$S_n = \frac{1}{9}(10^n + 10^{n-1} + \dots + 10^2 + 10^1 - n).$$

$$S_n = \frac{1}{9} \left(\frac{10(1-10^n)}{1-10} - n \right) = \frac{1}{81}(10^{n+1} - 9n - 10)$$

(n – число единиц в сумме).

$$\text{Ответ: } S_n = \frac{1}{81}(10^{n+1} - 9n - 10).$$

8. Решите уравнение, полагая, что левая часть – сумма бесконечно убывающей прогрессии.

$$x^2 + 3x^3 + 9x^4 + 27x^5 + \dots = 1 - 3x.$$

$$x = ?$$

$S = \frac{b}{1-q}$ – формула суммы бесконечно убывающей прогрессии.

Рассмотрим левую часть.

$$L = x^2 + 3x^3 + 9x^4 + 27x^5 + \dots = \\ = x^2(1 + 3x + 9x^2 + 27x^3 + \dots) = x^2 \cdot \frac{1}{1-3x},$$

т.е. уравнение приобретает вид $\frac{x^2}{1-3x} = 1 - 3x$.

$$\begin{cases} x = 1 - 3x \\ x = 3x - 1 \end{cases}; \quad \begin{cases} x = \frac{1}{4} \\ x = \frac{1}{2} \end{cases}.$$

Ответ: $x = \frac{1}{4}$; $x = \frac{1}{2}$.

9. $x_n = \frac{3n-2}{6n+3}$.

Выясните:

1. Монотонность;
2. Ограниченность;
3. Докажите существование предела x_n по определению.

$$\begin{aligned} 1) \quad x_{n+1} &= \frac{3(n+1)-2}{6(n+1)+3} = \frac{3n+1}{6n+9}; \\ x_{n+1} - x_n &= \frac{3n+1}{6n+9} - \frac{3n-2}{6n+3} = \\ &= \frac{(3n+1)(2n+1) - (3n-2)(2n+3)}{3(2n+1)(2n+3)} = \\ &= \frac{6n^2+5n+1-6n^2-5n+6}{3(2n+1)(2n+3)} = \frac{7}{3(2n+1)(2n+3)} > 0, \end{aligned}$$

т.е. для $\forall n \in \mathbb{N}$ $x_{n+1} > x_n$, значит последовательность x_n строго возрастающая.

2) $x_n = \frac{3n-2}{6n+3}$. Вычислим несколько значений

последовательности: $x_1 = \frac{1}{9}$; $x_2 = \frac{4}{15}$; $x_3 = \frac{7}{21}$; ...;

$x_{10} = \frac{28}{63}$; ...; $x_{100} = \frac{298}{603}$. Так как x_n возрастающая,

то для $\forall n \in \mathbb{N}$ $x_n \geq \frac{1}{9}$, т.е. ограничена снизу.

Похоже, что $x_n \rightarrow 0,5$. Проверим $x_n < 0,5$ или нет.

$$\frac{3n-2}{6n+3} - \frac{1}{2} = \frac{6n-4-6n-3}{2 \cdot 3(2n+1)} = -\frac{7}{6(2n+1)} < 0.$$

Действительно, для $\forall n \in \mathbb{N}$ $x_n < 0,5$.

Итак, для $\forall n \in \mathbb{N} \quad x_n \in \left[\frac{1}{9}; 0,5 \right)$.

Мы доказали ограниченность x_n .

3) Попробуем доказать, что $x_n \rightarrow 0,5$, т.е. для

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_0 \mid \forall n > N_0 \Rightarrow |x_n - 0,5| < \varepsilon$, тогда

$$\begin{cases} -\frac{7}{6(2n+1)} < \varepsilon; & \text{для } \forall n \in \mathbb{N} - \text{это истинно;} \\ -\frac{7}{6(2n+1)} > -\varepsilon \Leftrightarrow \frac{7}{6(2n+1)} < \varepsilon. \end{cases}$$

Так как $\varepsilon > 0$ и $2n + 1 > 0$, то $\frac{7}{6\varepsilon} < 2n + 1$;

т.е. $\frac{7-6\varepsilon}{12\varepsilon} < n$. Пусть $N_0 = \left[\frac{7-6\varepsilon}{12\varepsilon} \right]$, тогда для

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_0 \left(N_0 = \left[\frac{7-6\varepsilon}{12\varepsilon} \right] \mid \forall n > N_0 \Rightarrow |x_n - 0,5| < \varepsilon \right)$.

Это по определению значит $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0,5$,
что и требовалось доказать.

10. Вычислите

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2}{(n+1)(n-3)(n+4)} =$$

$$\left(1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \right)$$

тождество Архимеда.

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6(n+1)(n-3)(n+4)} = \frac{1}{6} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(2n+1)}{(n-3)(n+4)} =$$

$$= \frac{1}{6} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 \left(2 + \frac{1}{n} \right)}{n^2 \left(1 - \frac{3}{n} \right) \left(1 + \frac{4}{n} \right)} = \frac{1}{6} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{1}{n}}{\left(1 - \frac{3}{n} \right) \left(1 + \frac{4}{n} \right)} =$$

$$= \frac{\frac{1}{6} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(2 + \frac{1}{n} \right)}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{3}{n} \right) \left(1 + \frac{4}{n} \right)} = \frac{\frac{1}{6} \cdot \frac{2+0}{1+0}}{(1-0)(1+0)} = \frac{1}{3}.$$

Ответ: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2}{(n+1)(n-3)(n+4)} = \frac{1}{3}.$

Решение зачетной карточки 4

1. $a_n - \div$

$$\left. \begin{array}{l} a_2 + a_4 + a_6 = 36 \\ a_2 \cdot a_3 = 54 \end{array} \right\} \begin{array}{l} a_1 = ? \\ d = ? \end{array}$$

$$\begin{cases} a_1 + d + a_1 + 3d + a_1 + 5d = 36 \\ (a_1 + d)(a_1 + 2d) = 54 \end{cases};$$

$$\begin{cases} a_1 + 3d = 12 \\ (a_1 + d)(a_1 + 2d) = 54 \end{cases};$$

$$\begin{cases} a_1 = 12 - 3d \\ (12 - 3d + d)(12 - 3d + 2d) = 54 \end{cases};$$

$$\begin{cases} a_1 = 12 - 3d \\ 2(6 - d)(12 - d) = 54 \end{cases}; \quad \begin{cases} a_1 = 12 - 3d \\ d^2 - 18d + 72 = 27 \end{cases};$$

$$\begin{cases} a_1 = 12 - 3d \\ d^2 - 18d + 45 = 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} a_1 = 12 - 3d \\ \begin{cases} d = 3 \\ d = 15 \end{cases} \end{cases}; \quad \begin{cases} a_1 = 3 \\ d = 3 \\ d = 15 \\ a_1 = -33 \end{cases};$$

Ответ: 1) $a_1 = 3; d = 3;$

2) $a_1 = -33; d = 15.$

2. $x^2 - 6x + a = 0$, где $x_1; x_2$ - корни;

$x^2 - 24x + b = 0$, где $x_3; x_4$ - корни;

$$\left. \begin{array}{l} x_1; x_2; x_3; x_4 - \div \div \end{array} \right\} \begin{array}{l} a = ? \\ b = ? \end{array}$$

По теореме Виета $\begin{cases} x_1 + x_2 = 6 \\ x_1 \cdot x_2 = a \\ x_3 + x_4 = 24 \\ x_3 \cdot x_4 = b \end{cases}$

$$\text{Так как } \begin{cases} x_2 = x_1 q \\ x_3 = x_1 q^2 \\ x_4 = x_1 q^3 \end{cases}, \text{ то } \begin{cases} x_1(1+q) = 6 \\ x_1^2 \cdot q = a \\ x_1 q^2(1+q) = 24 \\ x_1^2 q^5 = b \end{cases};$$

$$\begin{cases} x_1(1+q) = 6 \\ x_1 q^2(1+q) = 24 \end{cases} \begin{matrix} \boxed{2} \\ \boxed{1} \end{matrix}; \quad \begin{cases} q^2 = 2 \\ x = \frac{6}{1+q} \end{cases};$$

$$\begin{cases} q = 2 \\ x = 2 \\ q = -2 \\ x = -6 \end{cases}$$

$$1) \quad x = 2; \quad q = 2;$$

$$a = x_1^2 q = 8; \quad b = x_1^2 q^5 = 2^7 = 128.$$

$$2) \quad x = -6; \quad q = -2;$$

$$a = x_1^2 q = -72; \quad b = x_1^2 q^5 = -1152.$$

$$\text{Ответ: } 1) \quad a = 8; \quad b = 128;$$

$$2) \quad a = -72; \quad b = -1152.$$

3. Найти сумму всех двузначных чисел, которые делятся хотя бы на шесть или на семь.

Пусть A – множество всех двузначных чисел, кратных шести;

B – множество всех двузначных чисел, кратных семи.

$$1) \quad \left. \begin{array}{l} a_1 = 12 \\ a_n = 96 \\ a = 6 \end{array} \right\} n = \frac{a_n - a_1 + d}{d}; \quad n = \frac{96 - 12 + 6}{6} = 15;$$

$$S_{15} = \frac{a_1 + a_{15}}{2} \cdot 15;$$

$$S_{15} = \frac{12 + 96}{2} \cdot 15 = 54 \cdot 15 = 810.$$

Сумма чисел, делящихся на 6, $S(A) = 810$.

$$2) \left. \begin{array}{l} a_1 = 14 \\ a_n = 96 \\ a = 7 \end{array} \right\} n = \frac{98-14+7}{7} = 13;$$

$$S_{13} = \frac{14+98}{2} \cdot 13 = 56 \cdot 13 = 728.$$

Сумма всех двузначных чисел, кратных семи,
 $S(B) = 728$.

$$3) \left. \begin{array}{l} a_1 = 42 \\ a_n = 84 \\ a = 42 \end{array} \right\} n = \frac{84-42+42}{42} = 2;$$

$$S_2 = \frac{42+84}{2} \cdot 2 = 63 \cdot 2 = 126.$$

$S(A \cap B) = 126$ - сумма всех двузначных чисел,
 кратных 42.

Так как $m(A \cup B) = m(A) + m(B) - m(A \cap B)$, то
 $S(A \cup B) = S(A) + S(B) - S(A \cap B)$;

$$S(A \cup B) = 810 + 728 - 126 = 1412.$$

Ответ: сумма всех двузначных чисел, кратных
 или шести, или семи, равна 1412.

4. Решите уравнение

$$\frac{2x-1}{2x} + \frac{2x-2}{2x} + \frac{2x-3}{2x} + \dots + \frac{1}{2x} = 3.$$

$$2x - 1 + 2x - 2 + 2x - 3 + \dots + 1 = 6x \quad (x \neq 0).$$

Понимая, что левая часть уравнения связана с
 арифметической прогрессией, имеем:

$$\left. \begin{array}{l} a_1 = 2x - 1 \\ a_n = 1 \\ d = -1 \end{array} \right\} n = \frac{a_n - a_1 + d}{d}; \quad n = \frac{1 - (2x - 1) - 1}{-1} = 2x - 1,$$

$$\text{тогда } S = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n,$$

$$\text{т.е. } \frac{2x-1+1}{2}(2x-1) = 6x; \quad 2x^2 - 7x = 0;$$

$$\begin{cases} x = 0 & x \neq 0 \\ x = 3,5 \end{cases}.$$

Ответ: $x = 3,5$.

5. $\underline{9 + 99 + 999 + \dots + \dots = S_{100}} \mid S_{100} = ?$

Очевидно, имеем дело с суммой геометрической прогрессии, где $q = 10$.

Представим левую часть

$$\begin{aligned} & 9 + 99 + 999 + \dots = \\ & = 9 + (9 + 9 \cdot 10^1) + (9 + 9 \cdot 10^1 + 9 \cdot 10^2) + \dots \\ & \dots + (9 + 9 \cdot 10^1 + 9 \cdot 10^2 + \dots + 9 \cdot 10^{99}) = \\ & = 9 + \frac{9(1-10^2)}{1-10} + \frac{9(1-10^3)}{1-10} + \dots + \frac{9(1-10^{100})}{1-10} = \\ & = (10 - 1) + (10^2 - 1) + (10^3 - 1) + \dots + 10^{100} - 1 = \\ & = 10 + 10^2 + 10^3 + \dots + 10^{100} - 100 = \frac{10(1-10^{100})}{1-10} - 100 = \\ & = \frac{1}{9}(10^{101} - 10 - 900) = \frac{1}{9}(10^{101} - 910). \end{aligned}$$

Ответ: $S_{100} = \frac{1}{9}(10^{101} - 910)$.

6. $b_n - \dots$

$$\begin{cases} b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 = 84 \\ b_1 + b_2 + b_3 = 14 \end{cases} \begin{cases} b_1 = ? \\ q = ? \end{cases}$$

$$\begin{cases} b_1^2 + b_1^2 q^2 + b_1^2 q^4 = 84 \\ b_1 + b_1 q + b_1 q^2 = 14 \end{cases};$$

$$\begin{cases} b_1^2(1 + q^2 + q^4) = 84 \\ b_1(1 + q + q^2) = 14 \end{cases} \quad \boxed{2} : \boxed{1}.$$

Так как $1 + q^2 + q^4 = (1 + q + q^2)(1 + q + q^2)$, то

$$\begin{cases} b_1(1 - q + q^2) = 6 & \boxed{2} : \boxed{1} \\ b_1(1 + q + q^2) = 14 \\ \frac{1+q+q^2}{1-q+q^2} = \frac{7}{3} \\ b_1(1 + q + q^2) = 14 \end{cases}.$$

Решим первое уравнение $3 + 3q + 3q^2 = 7 - 7q + 7q^2$;

$$4q^2 - 10q + 4 = 0; \quad \begin{cases} q = 2; & b_1 = 2 \\ q = \frac{1}{2}; & b_1 = 8 \end{cases}.$$

Ответ: 1) $b_1 = 2; q = 2$;

$$2) b_1 = 8; q = \frac{1}{2}.$$

7. $a; b; c - \ddot{\div}$

$$\left. \begin{array}{l} (a - 1); b; (c - 1) - \ddot{\div} \\ (a - 1); (b - 2); (c - 4) - \ddot{\div} \end{array} \right\} \begin{array}{l} a = ? \\ b = ? \\ c = ? \end{array}$$

Так как $a; b; c - \ddot{\div}$, то $\begin{matrix} b = aq \\ c = aq^2 \end{matrix}$. Из условий

$(a - 1); b; (c - 1) - \ddot{\div}$, тогда $2b = a - 1 + c - 1$, т.е.

$$2aq = a + aq^2 - 2; \quad aq^2 - 2aq + a - 2 = 0.$$

Из условий также следует, что

$$(a - 1); (b - 2); (c - 4) - \ddot{\div},$$

$$\text{т.е. } (b - 2)^2 = (a - 1)(c - 4),$$

$$\text{значит } (aq - 2)^2 = (a - 1)(aq^2 - 4).$$

Преобразуя, имеем

$$a^2q^2 - 4aq + 4 = a^2q^2 - aq^2 - 4a + 4;$$

$aq^2 - 4aq + 4a = 0$. Полагая $a \neq 0$, получим

$$q^2 - 4q + 4 = 0, \text{ т.е. } q = 2.$$

Так как $aq^2 - 2aq + a - 2 = 0$, то

$$a \cdot 4 - 4a + a - 2 = 0; \quad a = 2.$$

Итак, $a = 2$; $b = 2 \cdot 2 = 4$; $c = 2 \cdot 2^2 = 8$.

Ответ: $a = 2$; $b = 4$; $c = 8$.

8. Решите уравнение

$$x^2 - 2x^3 + 4x^4 - 8x^5 + \dots = 2x + 1$$

$x^2(1 - 2x + 4x^2 - 8x^3 + \dots) = 2x + 1$ - в левой части четко просматривается сумма бесконечно убывающей

прогрессии. Так как $S = \frac{b_1}{1-q}$ для суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии, то

$$x^2(1 - 2x + 4x^2 - 8x^3 + \dots) = 2x + 1 \quad (|2x| < 1).$$

Тогда уравнение приобретает вид $x^2 \cdot \frac{1}{1+2x} = 2x + 1$;

$$(2x + 1)^2 - x^2 = 0; \quad (2x + 1 + x)(2x + 1 - x) = 0;$$

$$(3x + 1)(x + 1) = 0; \quad \begin{cases} x = -1 \notin \left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right) \\ x = -\frac{1}{3} \end{cases}.$$

Ответ: $x = -\frac{1}{3}$.

9. $x_n = \frac{4n+2}{8n-3}$

Выясните:

1. Монотонность

2. Ограниченность

3. Докажите существование предела x_n по определению.

$$1) \quad x_{n+1} = \frac{4(n+1)+2}{8(n+1)-3} = \frac{4n+6}{8n+5};$$

$$\begin{aligned}
 x_{n+1} - x_n &= \frac{4n+6}{8n+5} - \frac{4n+2}{8n-3} = \\
 &= \frac{(4n+6)(8n-3) - (4n+2)(8n+5)}{(8n+5)(8n-3)} = \\
 &= -\frac{28}{(8n+5)(8n-3)} < 0,
 \end{aligned}$$

т.е. x_n – убывающая последовательность.

2) Так как x_n убывающая,

$$\left. \begin{aligned}
 x_1 &= \frac{6}{5} = 1,2; \quad x_n \leq \frac{6}{5} \\
 x_n &= \frac{4n+2}{8n-3} > 0
 \end{aligned} \right\} \text{ для } \forall n \in \mathbb{N} \quad x_n \in (0; 1,2].$$

3) Вычислим первые значения членов последовательности.

$$x_2 = \frac{10}{13}; \quad x_3 = \frac{2}{3}; \quad x_{10} = \frac{42}{77}; \quad x_{100} = \frac{402}{797}.$$

Возникает гипотеза, что $(x \rightarrow \frac{1}{2})$ по определению

для $\forall \varepsilon > 0 \exists N_0 \mid \forall n > N_0 \Rightarrow \left| x_n - \frac{1}{2} \right| < \varepsilon$, если

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{1}{2}.$$

$$x_n - \frac{1}{2} = \frac{4n+2}{8n-3} - \frac{1}{2} = \frac{8n+4-8n+3}{2(8n-3)} = \frac{7}{2(8n-3)};$$

$$\left| x_n - \frac{1}{2} \right| < \varepsilon; \text{ значит } \left| \frac{7}{2(8n-3)} \right| < \varepsilon;$$

$$\begin{cases} \frac{7}{2(8n-3)} < \varepsilon \\ \frac{7}{2(8n-3)} > -\varepsilon \end{cases} \text{ для } (\forall n \in \mathbb{N} - \text{верно}).$$

Тогда $\frac{7}{2(8n-3)} < \varepsilon$; значит $\frac{7}{2 \cdot \varepsilon} < 8n - 3$ ($\varepsilon > 0$);

$$\frac{7}{2\varepsilon} + 3 < 8n; \quad n > \frac{7+6\varepsilon}{16\varepsilon}, \text{ тогда } N_0 = \left[\frac{7+6\varepsilon}{16\varepsilon} \right].$$

Получили, что для

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_0 \left(N_0 = \left[\frac{7+6\varepsilon}{16\varepsilon} \right] \right) \forall n > N_0 \Rightarrow \left| x_n - \frac{1}{2} \right| < \varepsilon.$$

$$\text{т.е. } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n+2}{8n-3} = \frac{1}{2},$$

что и требовалось доказать.

10. Вычислите $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2^2+4^2+6^2+8^2+\dots)^2}{(2+4+6+8+\dots)^3}$.

$$\begin{aligned} 1) S' &= 2^2 + 4^2 + 6^2 + 8^2 + \dots = \\ &= 4(1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \dots + n^2 + \dots); \end{aligned}$$

$$S'_n = 4 \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{2}{3}n(n+1)(2n+1);$$

$$2) S''_n = 2 \cdot \frac{1+n}{2} \cdot n = n(n+1);$$

$$S'' = 2 + 4 + 6 + 8 + \dots = 2(1 + 2 + 3 + \dots + n + \dots).$$

Тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2^2+4^2+6^2+8^2+\dots)^2}{(2+4+6+8+\dots)^3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(S'_n)^2}{(S''_n)^3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{2}{3}n(n+1)(2n+1)\right)^2}{(n(n+1))^3} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{4}{9}n^2(n+1)^2(2n+1)^2}{n^3(n+1)^3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4}{9} \cdot \frac{(n+1)^2(2n+1)^2}{n(n+1)^3} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4(2n+1)^2}{9n(n+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^2\left(2+\frac{1}{n}\right)^2}{9n^2\left(1+\frac{1}{n}\right)} =$$

$$= \frac{4}{9} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4+\frac{4}{n}+\frac{1}{n^2}}{1+\frac{1}{n}} = \frac{4}{9} \cdot \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(4+\frac{4}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)} =$$

$$= \frac{4}{9} \cdot \frac{4+0+0}{1+0} = \frac{16}{9} = 1\frac{7}{9}.$$

Ответ: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2^2+4^2+6^2+8^2+\dots)^2}{(2+4+6+8+\dots)^3} = 1\frac{7}{9}$.

Решение зачетной карточки 5

1. Решите уравнение $3 + 7 + 11 + \dots + x = 136$.

Очевидно, что левая часть уравнения связана с суммой членов арифметической прогрессии.

$$\left. \begin{array}{l} a_1 = 3 \\ a_n = x \\ d = 4 \end{array} \right\} n = \frac{a_n - a_1 + d}{d}; \quad n = \frac{x - 3 + 4}{4} = \frac{x + 1}{4};$$

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n; \quad S_n = \frac{3 + x}{2} \cdot \frac{x + 1}{4} = 136.$$

Получим квадратное уравнение

$$(3 + x)(x + 1) = 136 \cdot 8;$$

$$x^2 + 4x - 1085 = 0;$$

$$x_{1,2} = -2 \pm \sqrt{4 + 1085} = -2 \pm 33;$$

$$\left[\begin{array}{l} x = 31 \\ x = -35, \text{ но } x > 0 \text{ (из условий уравнения)}. \end{array} \right.$$

Ответ: $x = 31$.

2. $b_n - \ddots$

$$\left. \begin{array}{l} b_1 + b_2 + b_3 = 7 \\ b_1; b_2; (b_3 - 1) \ddots \\ S_n = 255 \end{array} \right\} n = ?$$

Так как $b_n - \ddots$, то $b_2 = b_1 \cdot q$
 $b_3 = b_1 \cdot q^2$.

Запишем в виде системы уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} b_1 + b_1q + b_1q^2 = 7 \\ 2b_1q = b_1 + b_1q^2 - 1; \\ S_n = \frac{b_1(1-q^n)}{1-q} = 255 \end{array} \right.$$

$$\begin{cases} b_1(1 + q + q^2) = 7 \\ b_1(1 - 2q + q^2) = 1 \quad \boxed{1} : \boxed{2}; \\ \frac{b_1(1-q^n)}{1-q} = 255 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{1+q+q^2}{1-2q+q^2} = 7 \\ b_1 = \frac{1}{(1-q)^2} ; \\ \frac{b_1(1-q^n)}{1-q} = 255 \end{cases} \cdot \begin{cases} 2q^2 - 5q + 2 = 0 \\ b_1 = \frac{1}{(1-q)^2} ; \\ \frac{b_1(1-q^n)}{1-q} = 255 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \begin{cases} q = 2 \\ q = \frac{1}{2} \end{cases} \\ b_1 = \frac{1}{(1-q)^2} ; \\ \frac{b_1(1-q^n)}{1-q} = 255 \end{cases}$$

$$1) \begin{cases} q = 2 \\ b_1 = 1 \\ \frac{1-2^n}{1-2} = 255 \end{cases} ; \begin{cases} q = 2 \\ b_1 = 1 \\ 2^n = 256 \end{cases}$$

$$\begin{cases} q = 2 \\ b_1 = 1 \\ n = 8 \quad (2^8 = 256) \end{cases} ;$$

$$2) \begin{cases} q = \frac{1}{2} \\ b_1 = 4 \\ \frac{4\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)}{1 - \frac{1}{2}} = 255 \end{cases} ; \begin{cases} q = \frac{1}{2} \\ b_1 = 4 \\ 2^{3-n} = 263; \quad n \notin \mathbb{N} \end{cases}$$

Ответ: $n = 8$.

3. $a; b; c - \text{---}$

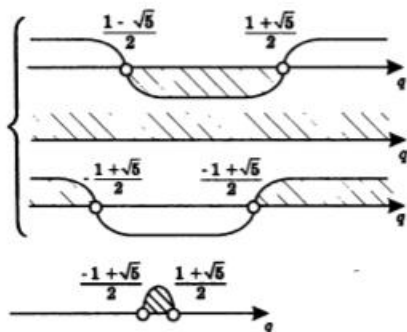
$$\left. \begin{array}{l} a; b; c \in \mathbb{N} \\ a; b; c - \text{стороны треугольника} \\ a \cdot b \cdot c = 216 \end{array} \right\} \begin{array}{l} a = ? \\ b = ? \\ c = ? \end{array}$$

Так как $a; b; c - \text{---}$, то
$$\begin{array}{l} b = aq \\ c = aq^2 \end{array}$$

Так как $a, b, c - \text{стороны треугольника}$,

$$\text{то } \begin{cases} a + b > c \\ a + c > b \\ b + c > a \end{cases}, \text{ т.е. } \begin{cases} a + aq > aq^2 \\ a + aq^2 > aq \\ aq + aq^2 > a \end{cases}$$

$$\text{тогда } \begin{cases} q^2 - q - 1 < 0 \\ q^2 - q + 1 > 0 \\ q^2 + q - 1 > 0 \end{cases}$$



Так как $a; b; c \in \mathbb{N}$, то $q > 0$ и $q \in \mathbb{N}$;

$q = 1 \in \left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}; \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)$ – других натуральных q нет.

Тогда $a = b = c$, т.е. $a^3 = 216$, т.е. $a = 6$.

Ответ: $a = 6; b = 6; c = 6$.

4. Решите уравнение

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30} + \dots + \frac{1}{342} = \frac{1}{342} \cdot (1+3+5+\dots+2n-1).$$

Левую часть представим в виде

$$\left. \begin{array}{l} \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2} \\ \frac{1}{6} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \\ \frac{1}{12} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \\ \frac{1}{20} = \frac{1}{4} - \frac{1}{5} \\ \frac{1}{30} = \frac{1}{5} - \frac{1}{6} \\ \dots\dots\dots \\ \frac{1}{342} = \frac{1}{18} - \frac{1}{19} \end{array} \right\}$$

Итак, $\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{342} = 1 - \frac{1}{19}$;

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \dots + \frac{1}{342} = \frac{18}{19}.$$

Правая часть, как видно, связана с суммой членов арифметической прогрессии $(1 + 3 + 5 + \dots + 2n - 1)$.

$$\left. \begin{array}{l} a_1 = 1 \\ a_n = 2n - 1 \\ d = 2 \end{array} \right\} n = \frac{a_n - a_1 + d}{2}; \quad n = \frac{2n-1-1+2}{2} = n;$$

$$S_n = \frac{1+2n-1}{2} \cdot n = n^2.$$

Тогда $\frac{18}{19} = \frac{n^2}{342}$;

$$\frac{18 \cdot 18 \cdot 19}{19} = n^2; \quad 18^2 = n^2; \quad n = 18.$$

Ответ: $n = 18$.

5. Найти сумму всех двузначных, чисел, не делящихся ни на 3, ни на 5. Выясним, чему равна сумма всех двузначных чисел, делящихся или на 3, или на 5, а затем исключим из суммы всех двузначных чисел.

$$1) \left. \begin{array}{l} a_1 = 12 \\ a_n = 99 \\ d = 3 \end{array} \right\} n = \frac{a_n - a_1 + d}{2}; \quad n = \frac{99 - 12 + 3}{3} = 30.$$

Пусть A – множество всех двузначных чисел, делящихся на три.

$$\text{Тогда } S_{30} = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n;$$

$$S_{30} = \frac{12 + 99}{2} \cdot 30 = 111 \cdot 15 = 1665.$$

Сумма всех двузначных чисел, делящихся на три,
 $S(A) = 1665.$

$$2) \left. \begin{array}{l} a_1 = 10 \\ a_n = 95 \\ d = 5 \end{array} \right\} n = \frac{95 - 10 + 5}{5} = 18.$$

B – множество всех двузначных чисел, делящихся на пять, тогда

$$S_{18} = \frac{10 + 95}{2} \cdot 18 = 105 \cdot 9 = 945.$$

$S(B) = 945$ – сумма всех двузначных чисел, делящихся на пять.

$$3) \left. \begin{array}{l} a_1 = 15 \\ a_n = 90 \\ d = 15 \end{array} \right\} n = \frac{90 - 15 + 15}{15} = 6.$$

$A \cap B$ – множество всех двузначных чисел, делящихся на пятнадцать, тогда

$$S_6 = \frac{15 + 90}{2} \cdot 6 = 105 \cdot 3 = 315.$$

$S(A \cap B) = 315$ – сумма всех двузначных чисел, делящихся на пятнадцать.

$$4) m(A \cup B) = m(A) + m(B) - m(A \cap B);$$

$$S(A \cup B) = S(A) + S(B) - S(A \cap B);$$

$$S(A \cup B) = 1665 + 945 - 315 = 2295;$$

$A \cup B$ – множество всех двузначных чисел, делящихся или на три, или на пять.

$$5) S = \frac{10+99}{2} \cdot 90 = 109 \cdot 45 = 4905 \text{ – сумма всех двузначных чисел.}$$

$4905 - 2295 = 2610$ – сумма всех двузначных чисел, не делящихся ни на три, ни на пять.

Ответ: искомая сумма – 2610.

6. Даны четыре числа $a; b; c; p$.

$$\left. \begin{array}{l} p; k; t - \div \\ k; t; m - \div\div \\ p + k + t = 12 \\ k + t + m = 19 \end{array} \right\} \begin{array}{l} p = ? \\ k = ? \\ t = ? \\ m = ? \end{array}$$

Так как $a; b; c - \div$, то $\begin{cases} b = a + d \\ c = a + 2d \end{cases}$;

$$1) \text{ так как } b; c; p - \div\div; \quad \begin{cases} c = b \cdot q \\ p = bq^2 \end{cases};$$

$$\begin{cases} a + a + d + a + 2d = 54 \\ b + bq + bq^2 = 126 \\ b = a + d \end{cases}; \quad \begin{cases} a + d = 18 \\ b(1 + q + q^2) = 126 \\ b = a + d \end{cases}.$$

$$\text{Тогда } 18(1 + q + q^2) = 126; \quad q^2 + q - 6 = 0; \quad \begin{cases} q = 2 \\ q = -3 \end{cases}.$$

$$2) \quad q = 2; \quad b = 18; \quad c = b \cdot q; \quad c = 36;$$

$$d = c - b = 36 - 18 = 18;$$

$$a = b - d; \quad a = 0;$$

$$p = c \cdot q; \quad p = 36 \cdot 2 = 72.$$

$$\text{Итак, } a = 0; \quad b = 18; \quad c = 36; \quad p = 72.$$

$$3) \quad q = -3; \quad b = 18; \quad c = b \cdot q; \quad c = -54;$$

$$d = c - b = -54 - 18 = -72;$$

$$a = b - d; \quad a = 18 - (-72) = 90;$$

$$p = c \cdot q; \quad p = -54 \cdot (-3) = 162,$$

$$\text{т.е. } a = 90; \quad b = 18; \quad c = -54; \quad p = 162.$$

$$\text{Ответ: } 1) \quad a = 0; \quad b = 18; \quad c = 36; \quad p = 72;$$

$$2) \quad a = 90; \quad b = 18; \quad c = -54; \quad p = 162.$$

$$7. \text{ Вычислите } \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n(n+1)} - n).$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n(n+1)} - n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n+1) - n^2}{\sqrt{n(n+1)} + n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + n - n^2}{n \left(\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1 \right)} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n \left(\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1 \right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1} = \frac{1}{\sqrt{1+0} + 1} = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Ответ: } \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n(n+1)} - n) = \frac{1}{2}.$$

8. Вычислите.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[8]{2} \dots \sqrt[2^n]{2} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(2^{\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^n}} \right) =$$

$$= 2^{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^n} \right)} = 2^1.$$

$$\text{Так как } S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^n},$$

то при $n \rightarrow \infty$ мы имеем дело с суммой бесконечно убывающей геометрической прогрессии.

$$S = \frac{b_1}{1-q}; \quad \text{т.е. } \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 1.$$

$$\text{Ответ: } \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[8]{2} \dots \sqrt[2^n]{2}) = 2.$$

9. $a_n - \div$

$$a_1 = 25 \quad \left| \begin{array}{l} \frac{1}{\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2}} + \frac{1}{\sqrt{a_2} + \sqrt{a_3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{a_{100}} + \sqrt{a_{101}}} = 1 \end{array} \right. \quad d = ?$$

Домножим на сопряженное выражение числитель и знаменатель каждой дроби левой суммы.

$$\frac{\sqrt{a_1} - \sqrt{a_2}}{a_1 - a_2} + \frac{\sqrt{a_2} - \sqrt{a_3}}{a_2 - a_3} + \frac{\sqrt{a_3} - \sqrt{a_4}}{a_3 - a_4} + \dots + \frac{\sqrt{a_{100}} - \sqrt{a_{101}}}{a_{100} - a_{101}} = 1.$$

Так как $a_1 - a_2 = a_2 - a_3 = \dots = a_{100} - a_{101} = -d$, то

$$\sqrt{a_1} - \sqrt{a_2} + \sqrt{a_2} - \sqrt{a_3} + \sqrt{a_3} - \sqrt{a_4} + \dots - \sqrt{a_{100}} + \sqrt{a_{101}} = -d,$$

тогда $\sqrt{a_1} - \sqrt{a_{101}} = -d$.

Так как $a_1 = 25$, то $\sqrt{25} + d = \sqrt{a_{101}}$;

$$a_{101} = a_1 + 100d;$$

$$\left. \begin{array}{l} (5 + d)^2 = a_{101} \\ 25 + 10d + d^2 = 25 + 100d \end{array} \right| \quad d^2 - 90d = 0;$$

$$\left[\begin{array}{l} d = 0 \quad (d \neq 0) - (\text{для содержательной прогрессии}) \\ d = 90 \end{array} \right].$$

Ответ: $d = 90$.

10. Вычислить

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots}}}} \quad (n - \text{корней}).$$

Рассмотрим последовательность

$$\begin{aligned} x_1 &= \sqrt{c} \\ x_2 &= \sqrt{c + \sqrt{c}} \\ &\dots\dots\dots \\ x_n &= \sqrt{c + x_{n-1}} \end{aligned} \quad (x_n > 0)$$

Докажем, что она имеет предел.

Докажем, что она возрастающая.

Рассмотрим

$$x_2 - x_1 = \sqrt{c + \sqrt{c}} - \sqrt{c} = \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{c + \sqrt{c} + \sqrt{c}}} > 0,$$

тогда $x_2 > x_1$;

$$\begin{aligned} x_3 - x_2 &= \sqrt{c + \sqrt{c + \sqrt{c}}} - \sqrt{c + \sqrt{c}} = \\ &= \sqrt{c + x_2} - \sqrt{c + x_1} = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{c + x_2} + \sqrt{c + x_1}} > 0, \end{aligned}$$

значит $x_3 > x_2$.

Аналогично

$$x_4 - x_3 > 0;$$

$$x_n - x_{n-1} > 0.$$

$$x_{n+1} - x_n = \sqrt{c + x_n} - \sqrt{c + x_{n-1}} = \frac{x_n - x_{n-1}}{\sqrt{c + x_n} + \sqrt{c + x_{n-1}}} > 0,$$

тогда, так как $x_n > x_{n-1}$, то $x_{n+1} > x_n$.

Итак, x_n – возрастающая. Более строго это можно доказать только методом математической индукции.

Выясним, что отсюда следует.

Так как $x_{n+1} > x_n$ и $x_{n+1} = \sqrt{c + x_n}$,

то $\sqrt{c + x_n} > x_n$, значит $c + x_n > x_n^2$,

т.е. $x_n^2 - x_n - c < 0$; $x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+4c}}{2}$;

$$\frac{1 - \sqrt{1+4c}}{2} < x_n < \frac{1 + \sqrt{1+4c}}{2}.$$

А это значит, что x_n ограничена (так как c – постоянная), а по теореме Вейерштрасса любая монотонная ограниченная последовательность имеет предел.

Пусть $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, тогда $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = a$,

так как $x_{n+1} = \sqrt{c + x_n}$, то в предельном варианте

$$a = \sqrt{c + a}; \quad a^2 = c + a; \quad a^2 - a - c = 0;$$

$$a = \frac{1 + \sqrt{1+4c}}{2}.$$

Возвращаясь к примеру, видим, что $c = 2$, тогда

$$a = \frac{1 + \sqrt{1+4 \cdot 2}}{2} = \frac{1+3}{2} = 2,$$

т.е. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots}}}} = 2$.

Ответ: $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots}}}} = 2$.

Решение зачетной карточки 6

1. Решите уравнение

$$(x^3 + 1) + (2x^3 + 3) + (3x^3 + 5) + \dots + (10x^3 + 19) = 45.$$

Левую часть можно представить

$$(x^3 + 2x^3 + 3x^3 + \dots + 10x^3) + (1 + 3 + 5 + \dots + 19) = 45.$$

Очевидно, что в левой части мы имеем дело с суммой арифметической прогрессии.

$$S_1 = x^3 + 2x^3 + 3x^3 + \dots + 10x^3;$$

$$S_1 = \frac{x^3 + 10x^3}{2} \cdot 10 = 11x^3 \cdot 5 = 55x^3;$$

$$S_2 = 1 + 3 + 5 + \dots + 19;$$

$$S_2 = \frac{1+19}{2} \cdot 10 = 20 \cdot 5 = 100.$$

Уравнение приобретает вид $55x^3 + 100 = 45$;

$$x^3 = -1; \quad x = -1.$$

Ответ: $x = 1$.

2. $a_n - \div$

$$\left. \begin{array}{l} S_3 = 54 \\ a_1; a_2 - 9; a_3 - 6 \end{array} \right\} \begin{array}{l} a_1 = ? \\ d = ? \end{array}$$

Так как $b_2^2 = b_1 \cdot b_3$,

$$\left\{ \begin{array}{l} a_1 + a_2 + a_3 = 54 \\ (a_2 - 9)^2 = a_1(a_3 - 6) \end{array} \right\}; \quad \left\{ \begin{array}{l} a_1 + a_1 + d + a_1 + 2d = 54 \\ (a_1 + d - 9)^2 = a_1(a_1 + 2d - 6) \end{array} \right\};$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a_1 + d = 18 \\ 81 = a_1(12 + d) \end{array} \right\}; \quad \left\{ \begin{array}{l} d = 18 - a_1 \\ 81 = a_1(12 + 18 - a_1) \end{array} \right\};$$

$$a_1^2 - 30a_1 + 81 = 0; \quad \left[\begin{array}{l} a_1 = 3; \quad d = 15 \\ a_1 = 27; \quad d = -9 \end{array} \right].$$

Ответ: 1) $a_1 = 3$; $d = 15$;

2) $a_1 = 27$; $d = -9$.

3. $a; b; c - \div$

$$\left. \begin{array}{l} a; b; c \in \mathbb{N} \\ a; b; c - \text{стороны треугольника} \\ a \cdot b \cdot c = 216 \end{array} \right\} \begin{array}{l} a = ? \\ b = ? \\ c = ? \end{array}$$

Из условий следует

$$\left. \begin{array}{l} b = a + d \\ c = a + 2d \end{array} \right\} \begin{array}{l} a + a + d > a + 2d \\ a + a + 2d > a + d \\ a + d + a + 2d > a \end{array}$$

(правило треугольника);

$$\left\{ \begin{array}{l} a > d \\ a > -d \\ a > -3d \end{array} \right.$$

Но $a + b + c = 15$,т.е. $a + a + d + a + 2d = 15$;

$$a + d = 5.$$

Проанализируем:

так как $a; b; c \in \mathbb{N}$ и $a > d$, то $a = 2; d = 1$, тогда $2 + 1 = 5$ – ложь; $a = 3; d = 1$, тогда $3 + 1 = 5$ – ложь; $a = 3; d = 2$, тогда $3 + 2 = 5$ – истина; $a = 4; d = 1$, тогда $4 + 1 = 5$ – истина; $a = 4; d = 2$, тогда $4 + 2 = 5$ – ложь.Ответ: 1) $a = 3; b = 5; c = 7$;2) $a = 4; b = 5; c = 6$.

4. Решить уравнение

$$\frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \dots + \frac{1}{n^2 + 3n + 2} = \frac{11}{24}.$$

Проанализируем члены левой части.

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{6} &= \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \\
 \frac{1}{12} &= \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \\
 \frac{1}{20} &= \frac{1}{4} - \frac{1}{5} \\
 + & \dots\dots\dots \\
 & \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \\
 \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \dots + \frac{1}{(n+1)(n+2)} &= \frac{1}{2} - \frac{1}{n+2} = \frac{n}{2(n+2)}.
 \end{aligned}$$

Почленно сложим члены левой и правой части: в сумме остаются только первый и последний член – все остальные взаимно уничтожатся.

Тогда $\frac{n}{2(n+2)} = \frac{11}{24}$; $12n = 11n + 22$.

Ответ: $n = 22$.

5. Найти сумму всех двузначных чисел, не делящихся ни на 3, ни на 4.

Вычислим сумму всех двузначных чисел, делящихся или на три, или на четыре, а затем исключим их из суммы всех двузначных чисел.

$$1) \left. \begin{array}{l} a_1 = 12 \\ a_n = 99 \\ d = 3 \end{array} \right\} n = \frac{a_n - a_1 + d}{2}; \quad n = \frac{99 - 12 + 3}{3} = 30;$$

$$S_{30} = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n;$$

$$S_{30} = \frac{12 + 99}{2} \cdot 30 = 111 \cdot 15 = 1665.$$

A – множество всех двузначных чисел, кратных трем. $S(A) = 1665$ – сумма всех двузначных чисел, кратных трем.

$$2) \left. \begin{array}{l} a_1 = 10 \\ a_n = 96 \\ d = 4 \end{array} \right\} n = \frac{96 - 12 + 4}{4} = 22.$$

B – множество всех двузначных чисел, кратных четырем.

$$S_{22} = \frac{12+96}{2} \cdot 22 = 108 \cdot 11 = 1188.$$

$S(B) = 1188$ – сумма всех двузначных чисел, кратных четырем.

$$3) \left. \begin{array}{l} a_1 = 12 \\ a_n = 96 \\ d = 12 \end{array} \right\} n = \frac{96-12+12}{12} = 8.$$

$A \cap B$ – множество всех двузначных чисел, кратных 12.

$$S_8 = \frac{12+96}{2} \cdot 8 = 108 \cdot 4 = 432$$

$S(A \cap B) = 432$ – сумма всех двузначных чисел, кратных 12.

$$m(A \cup B) = m(A) + m(B) - m(A \cap B);$$

$$S(A \cup B) = S(A) + S(B) - S(A \cap B);$$

$$S(A \cup B) = 1665 + 1188 - 432 = 2421,$$

где $A \cup B$ – множество всех двузначных чисел, делящихся или на три, или на четыре.

$$4) \left. \begin{array}{l} a_1 = 10 \\ a_n = 99 \\ d = 1 \end{array} \right\} n = \frac{99-10+1}{1} = 90.$$

$S_{90} = \frac{10+99}{2} \cdot 90 = 109 \cdot 45 = 4905$ – сумма всех двузначных чисел.

Таким образом, $4905 - 2421 = 2484$ – сумма всех двузначных чисел, не делящихся ни на три, ни на четыре.

Ответ: искомая сумма – 2484.

6. Даны четыре числа $p; k; t; m$.

$$\left. \begin{array}{l} p; k; t - \ddots \\ k; t; m - \ddots \\ p + k + t = 12 \\ k + t + m = 19 \end{array} \right\} \begin{array}{l} p = ? \\ k = ? \\ t = ? \\ m = ? \end{array}$$

Из условий следует

$$\begin{cases} k = p + d \\ t = p + 2d \\ t = k \cdot q \\ m = k \cdot q^2 \end{cases} \quad \begin{cases} p + k + t = 12 \\ k + t + m = 19 \end{cases};$$

$$\begin{cases} p + p + d + p + 2d = 12 \\ k + kq + kq^2 = 19 \end{cases}; \quad \begin{cases} p + d = 4 \\ k(1 + q + q^2) = 19 \end{cases},$$

но $k = p + d$, т.е. $k = 4$.

$$\text{тогда } \begin{cases} p + d = 4 \\ 4 \cdot (1 + q + q^2) = 19 \end{cases}, \quad \text{т.е. } 4q^2 + 4q - 15 = 0;$$

$$(q_{1,2}) = \frac{-2 \pm \sqrt{4+60}}{4} = \frac{-2 \pm 8}{4}.$$

$$1) \begin{cases} q = \frac{3}{2} \\ q = -\frac{5}{2} \end{cases}, \quad \text{тогда } 2) \begin{cases} t = k \cdot q = 4 \cdot \frac{3}{2} = 6 \\ t = k \cdot q = 4 \cdot \left(-\frac{5}{2}\right) = -10 \end{cases};$$

$$3) \begin{cases} m = kq^2 = 4 \cdot \frac{9}{4} = 9 \\ m = kq^2 = 4 \cdot \frac{25}{4} = 25 \end{cases};$$

$$4) d = t - k \begin{cases} d = 2 \\ d = -14 \end{cases};$$

$$5) p = k - d \begin{cases} p = 2 \\ p = 18 \end{cases}.$$

Ответ: 1) $p = 2; k = 4; t = 6; m = 9; \left(q = \frac{3}{2}; d = 2\right);$

2) $p = 18; k = 4; t = -10; m = 25;$

$\left(q = -\frac{5}{2}; d = -14\right).$

7. Вычислите.

$$\begin{aligned}
& \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{n^2 + n - 1} - \sqrt{n^2 - n + 1} \right) = \\
& = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + n - 1 - (n^2 - n + 1)}{\sqrt{n^2 + n - 1} + \sqrt{n^2 - n + 1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n \left(1 - \frac{1}{n}\right)}{n \left(\sqrt{1 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}} + \sqrt{1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}} \right)} = \\
& = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 \left(1 - \frac{1}{n}\right)}{\sqrt{1 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}} + \sqrt{1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}}} = \frac{2 \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{1 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}} + \sqrt{1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}} \right)} = \\
& = \frac{2(1-0)}{\sqrt{1+0-0} + \sqrt{1-0+0}} = 1.
\end{aligned}$$

$$\text{Ответ: } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{n^2 + n - 1} - \sqrt{n^2 - n + 1} \right) = 1.$$

8. Вычислите.

$$\begin{aligned}
& \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt[3]{n^3 + 2n^2 - 1} - \sqrt[3]{n^3 + 3n - 1} \right) = \\
& = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 + 2n^2 - 1 - n^3 - 3n + 1}{\sqrt[3]{(n^3 + 2n^2 - 1)^2} + \sqrt[3]{(n^3 + 2n^2 - 1)(n^3 + 3n - 1)} + \sqrt[3]{(n^3 + 3n - 1)^2}} = \\
& = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 \left(2 - \frac{3}{n}\right)}{n^2 \left(\sqrt[3]{\left(1 + \frac{2}{n} - \frac{1}{n^3}\right)^2} + \sqrt[3]{\left(1 + \frac{2}{n} - \frac{1}{n^3}\right)\left(1 + \frac{3}{n^2} - \frac{1}{n^3}\right)} + \sqrt[3]{\left(1 + \frac{3}{n^2} - \frac{1}{n^3}\right)^2} \right)} = \\
& = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(2 - \frac{3}{n}\right)}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt[3]{\left(1 + \frac{2}{n} - \frac{1}{n^3}\right)^2} + \sqrt[3]{\left(1 + \frac{2}{n} - \frac{1}{n^3}\right)\left(1 + \frac{3}{n^2} - \frac{1}{n^3}\right)} + \sqrt[3]{\left(1 + \frac{3}{n^2} - \frac{1}{n^3}\right)^2} \right)} = \\
& = \frac{2-0}{\sqrt[3]{(1+0-0)^2} + \sqrt[3]{(1+0-0)(1+0-0)} + \sqrt[3]{(1+0-0)^2}} = \\
& = \frac{2}{1+1+1} = \frac{2}{3}.
\end{aligned}$$

$$\text{Ответ: } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt[3]{n^3 + 2n^2 - 1} - \sqrt[3]{n^3 + 3n - 1} \right) = \frac{2}{3}.$$

9. $b_n - \dots$

$$\left. \begin{aligned} S_{10} &= 20 \\ S'_{10} &= \frac{1}{b_1} + \frac{1}{b_2} + \dots + \frac{1}{b_{10}} = 10 \end{aligned} \right| b_1 \cdot b_2 \cdot b_3 \cdot \dots \cdot b_{10} = ?$$

Так как $b_n - \dots$, $S_{10} = b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_{10}$, где

$$S_{10} = \frac{b_1(1-q^{10})}{1-q}.$$

Если рассмотреть

$$b'_1 = \frac{1}{b_1}$$

$$b'_2 = \frac{1}{b_2}$$

.....

$$b'_{10} = \frac{1}{10}, \text{ то } b'_n - \dots, \text{ где } q' = \frac{1}{q}.$$

$$\text{Тогда } S'_{10} = \frac{\frac{1}{b_1} \left(1 - \left(\frac{1}{q} \right)^{10} \right)}{1 - \frac{1}{q}} = \frac{q(q^{10}-1)}{b_1(q-1)q^{10}};$$

$$\frac{S_{10}}{S'_{10}} = \frac{\frac{b_1(1-q^{10})}{1-q}}{\frac{q(q^{10}-1)}{b_1(q-1)q^{10}}} = 2, \text{ тогда } \frac{b_1(q^{10}-1)}{q-1} \cdot \frac{b_1(q-1)q^{10}}{q(q^{10}-1)} = 2.$$

Значит $b_1^2 \cdot q^9 = 2$;

$$b_1 \cdot b_2 \cdot b_3 \dots b_{10} = b_1^{10} \cdot q^1 \cdot q^2 \cdot q^3 \cdot \dots \cdot q^9 = b_1^{10} \cdot q^{1+2+3+\dots+9} = b_1^{10} \cdot q^{45}$$

(так как $1 + 2 + 3 + \dots + 9 = \frac{1+9}{2} \cdot 9 = 45$);

$$b_1^{10} \cdot q^{45} = (b_1^2 \cdot q^9)^5, \text{ так как } b_1^2 \cdot q^9 = 2, \text{ то}$$

$$b_1^{10} \cdot q^{45} = 2^5 = 32.$$

Ответ: $b_1 \cdot b_2 \cdot b_3 \cdot \dots \cdot b_{10} = 32$.

10. $a_n - \div; a_n \neq 0$.

$$\text{Вычислите } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{a_1 \cdot a_2} + \frac{1}{a_2 \cdot a_3} + \dots + \frac{1}{a_n \cdot a_{n+1}} \right).$$

Так как $a_n = a_1 + (n - 1)d$, то

$$\frac{1}{a_1 \cdot a_2} = \frac{1}{a_1(a_1 + d)} = \frac{1}{d} \left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_1 + d} \right);$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{a_n \cdot a_{n+1}} &= \frac{1}{(a_1 + (n-1)d)(a_1 + nd)} = \\ &= \frac{1}{d} \left(\frac{1}{a_1 + (n-1)d} - \frac{1}{a_1 + nd} \right). \end{aligned}$$

Складывая почленно левую и правые части равенств и учитывая, что каждое второе слагаемое в предыдущей скобке взаимно уничтожается с каждым первым слагаемым в последующей скобке, получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{a_1 a_2} + \frac{1}{a_2 a_3} + \frac{1}{a_3 a_4} + \dots + \frac{1}{a_n a_{n+1}} &= \frac{1}{d} \left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_1 + nd} \right) = \\ &= \frac{1}{d} \cdot \frac{nd}{a_1(a_1 + nd)} = \frac{n}{a_1(a_1 + nd)}. \end{aligned}$$

Значит

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{a_1 \cdot a_2} + \frac{1}{a_2 \cdot a_3} + \dots + \frac{1}{a_n \cdot a_{n+1}} \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{a_1(a_1 + nd)} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{na_1 \left(\frac{a_1}{n} + d \right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_1 \left(\frac{a_1}{n} + d \right)} = \frac{1}{a_1(0 + d)} = \frac{1}{a_1 d}. \end{aligned}$$

$$\text{Ответ: } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{a_1 \cdot a_2} + \frac{1}{a_2 \cdot a_3} + \dots + \frac{1}{a_n \cdot a_{n+1}} \right) = \frac{1}{a_1 d}.$$

Содержание

1. Множества	5
Введение	5
Свойства включений	7
Операции над множествами	8
Свойства операций	10
Практикум 1	13
Тренировочная работа 1	15
Проверочная работа 1	17
Зачетная работа 1	18
Практикум 2	19
Тренировочная работа 2	22
Применение операций над множествами к решению неравенств	24
Практикум 3	25
Практикум 4	27
Тренировочная работа 3	30
Зачетная работа 2	36
Мощность множества	37
Практикум 5	38
Дополнение	41
Практикум 6	43
Практикум 7	44
Тренировочная работа 4	45
Практикум 8	49
Тренировочная работа 5	55
Разность двух множеств	60
Практикум 9	62
Тренировочная работа 6	66
Практикум 10	69
Тренировочная работа 7	74
Проверочная работа 2	77
Тренировочная работа 8	78

Проверочная работа 3	81
Зачетная работа 3	83
2. Функции	85
Введение	85
Практикум 11	85
Тренировочная работа 9	89
Специальные функции	92
3. Последовательности	93
Введение	93
Практикум 12	94
Классификация и виды последовательностей	95
Практикум 13	96
Способы задания функции	99
Продолжение классификации последовательностей	102
Тренировочная работа 10	102
Предел последовательности	107
Практикум 14 (введение)	107
Тренировочная работа 11	112
Проверочная работа 4	113
Историческая справка	114
Некоторые вопросы логики доказательств	114
Основные теоремы о пределах	116
Алгебраические операции над пределами	120
Применение теорем о пределах к вычислению пределов	122
Практикум 15	122
Тренировочная работа 12	124
Проверочная работа 5	129
Применение теории пределов для вычисления площадей	130
4. Прогрессии	133
Арифметическая прогрессия	133
Практикум 16	137
Практикум 17	139
Практикум 18	142
Тренировочная работа 13	146
Геометрическая прогрессия	150

Практикум 19	152
Характеристические признаки геометрической прогрессии	154
Практикум 20	157
Тренировочная работа 14	159
Практикум 21	167
Проверочная работа 6	171
Бесконечно убывающая геометрическая прогрессия	173
Практикум 22	174
Практикум 23	176
Тренировочная работа 15	179
5. Зачетные карточки	187
Зачетная карточка 1	187
Зачетная карточка 2	189
Зачетная карточка 3	191
Зачетная карточка 4	193
Зачетная карточка 5	195
Зачетная карточка 6	197
8. Решения	199
Решение проверочной работы 1	199
Решение проверочной работы 2	200
Решение проверочной работы 3	203
Решение проверочной работы 4	211
Решение проверочной работы 5	213
Решение проверочной работы 6	217
Решение зачетной работы 1	224
Решение зачетной работы 2	225
Решение зачетной работы 3	231
Решение зачетной карточки 1	239
Решение зачетной карточки 2	249
Решение зачетной карточки 3	259
Решение зачетной карточки 4	266
Решение зачетной карточки 5	274
Решение зачетной карточки 6	284

Учебное издание

СЕРИЯ «ДЛЯ ТЕХ, КТО ХОЧЕТ УЧИТЬСЯ»

Редактор серии *Заслуженный Учитель
Российской Федерации Б. Г. Зив*

**Шахмейстер Александр Хаймович
МНОЖЕСТВА. ФУНКЦИИ. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ**

Редактор *Е. В. Дольник*
Художник *Е. И. Герасимчук*
Компьютерная верстка *В. Р. Ткачук, С. С. Афонин, К. В. Шевяков*
Компьютерный набор *Е. А. Жданов, К. В. Шевяков*
Корректор *Е. Г. Никитина, И. Б. Смирнов*

ООО «ЧЕРО-НА-НЕВЕ» ЛП № 00096 от 5 марта 1999 г. Подписано
к печати 05.04.2004 г. Формат 60х90/16. Бумага типографская.
Печать офсетная. Объем 18,5 п.л. Тираж 7000. Заказ № 1241

ИЗДАТЕЛЬСТВО «ЧЕРО-НА-НЕВЕ»

192239, С.-Петербург, Альпийский пер., 9, корп. 3, кв. 34
Тел./факс: (812) 388-5881; 172-5071. E-mail: info@atlas.spb.su
118899, Москва, ул. Акад. Хохлова, дом 11
Тел./факс: (095) 939-3493; 939-4190. E-mail: chero@orc.ru

ИЗДАТЕЛЬСТВО МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

103009, Москва, улица Б. Никитская, дом 5/7
Тел./факс: (095) 939-3323; 203-6671. E-mail: kd_mgu@netbox.ru

**МОСКОВСКИЙ ЦЕНТР НЕПРЕРЫВНОГО
МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ**

121002, Москва, Б. Власьевский пер., дом 11
Тел./факс: (095) 241-0500; 241-7285. E-mail: biblio@mccme.ru

ГП Псковской области «Великолукская городская типография»
Комитета по средствам массовой информации
182100, Великие Луки, ул. Полиграфистов, 78/12
Тел./факс: (811-53) 3-62-95.
E-mail: VTL@MART.RU

Перед вами серия книг практически по всем разделам школьного курса математики.

По существу это энциклопедия различных методов решения задач, которые чаще всего встречаются непосредственно в школьном курсе.

Это прекрасные самоучители, которые позволят ученикам и абитуриентам без репетитора подготовиться к экзаменам.

Естественная логика построения материала "от простого к сложному" позволит учителю использовать эти книги для дифференцированной работы с учениками различного уровня подготовки.

Желательно, чтобы работа с материалами этой серии книг начиналась уже с 7, 8 класса и была постоянной и планомерной, тогда она даст наибольший эффект.

Б. Г. Зив

Серия "ДИСТЕХ" КТО ХОЧЕТ УСПЕХА?

- А. Х. Шахмейстер. **Дроби.**
- А. Х. Шахмейстер. **Корни.**
- А. Х. Шахмейстер. **Уравнения.**
- А. Х. Шахмейстер. **Дробно-рациональные неравенства.**
- А. Х. Шахмейстер. **Системы уравнений.**
- А. Х. Шахмейстер. **Иррациональные уравнения и неравенства.**
- А. Х. Шахмейстер. **Множества. Функции. Последовательности.**
- А. Х. Шахмейстер. **Логарифмы.**
- А. Х. Шахмейстер. **Тригонометрия.**
- А. Х. Шахмейстер. **Построение графиков функций элементарными методами.**
- А. Х. Шахмейстер. **Уравнения и неравенства с параметрами.**
- А. Х. Шахмейстер. **Задачи с параметрами в ЕГЭ.**
- Б. Г. Зив, А. Х. Шахмейстер. **Таблицы по алгебре и началам анализа.**
- Б. Г. Зив. **Алгебраический тренинг в задачах по мат. анализу.**

ISBN 5-79130-064-6



9 785791 300645